Decomposição ergódica de medidas invariantes

Proposição: $\Sigma(T)$ é de Probabilidade Total:

Precisaremos do seguinte lema.

Lema 6.3 Para todo boreleano $A \subset X$ e para toda $\mu \in M_T(X)$ vale

$$\mu(A \cap P_A) = \mu(A).$$

onde $P_A = \{x : \tilde{f}_A(x) > 0\}$.

$\uparrow$ notação Mañé

~~(Em particular P_A é de Prob. Total)~~

Prova:

Af 1 $\mu(P_A) > 0 \Leftarrow \mu(A) > 0$

$$\mu(A) = \int \chi_A \, d\mu = \int \tilde{f}_A \, d\mu$$

$$= \int_{\{\tilde{f}_A > 0\}} \tilde{f}_A \, d\mu + \int_{\{\tilde{f}_A = 0\}} \tilde{f}_A \, d\mu$$

$$\Rightarrow \mu(\{x : \tilde{f}_A > 0\}) > 0.$$

Af: Seja $\tilde{\mu}$ medida sobre os borelianos de X definida por

$$\tilde{\mu}(A) = \mu(A \cap P_A), \quad \forall A \text{ boreliano}$$

Como P_A é T invariante tem que

$$\tilde{\mu}(T^{-1}(A)) = \mu(T^{-1}(A) \cap P_A) =$$
$$= \mu(T^{-1}(A) \cap T^{-1} P_A) =$$
$$= \mu(A \cap P_A) = \tilde{\mu}(A)$$

i.e. $\underline{\underline{\text{Af: 2}}}$ $\tilde{\mu}$ é T-invariante
(Pode não ser de Probabilidade)

Donde

$$\tilde{\mu}(A) \overset{\text{Birkhoff}}{=\!=} \int_X \tilde{f}_A \, d\tilde{\mu} =$$

$$= \int_{X \cap P_A} \tilde{f}_A \, d\tilde{\mu} + \int_{P_A^c} \tilde{f}_A \, d\tilde{\mu}$$

$(\mu|_{X \cap P_A} = \tilde{\mu}|_{X \cap P_A})$

$$= \int_{X \cap P_A} \tilde{f}_A \, d\mu + \int_{P_A^c} \tilde{f}_A \, d\mu$$

$$= \int \tilde{f}_A \, d\mu = \mu(A)$$

$\tilde{\mu}$ é de Probab.!

Prova de que $\Sigma(T)$ é de prob. Total

dado $n = 1, 2, \dots$
X = compacto implica que podemos tomar cobertura finita Δ_n de X por bolas de raio $\frac{1}{2n}$.

Pela Lema 6.3, para todo $n = 1, 2 \dots$

$$\bigcup_{U \in \Delta_n} \left(U \cap \{ x : \tilde{f}_U(x) > 0 \} \right)$$

é de probabilidade total

Assim

$$X_0 = \bigcap_{n \geq 1} \left(\bigcup_{U \in \Delta_n} \left(U \cap \{ x : \tilde{f}_U(x) > 0 \} \right) \right)$$

é boulean de probabilidade total.

Para completar a prova, resta mostrar que $X_0 \cap \Sigma_2(T) \subset \Sigma(T)$.

Seja $p \in X_0 \cap \Sigma_e(T)$. Para mostrar que $p \in \operatorname{supp}(\mu_p)$ é suficiente mostrar que

$$\int f \, d\mu_p > 0$$

para toda $f \in C(X)$ tal que $f(p) > 0$.

Pelas suposições $\exists$ $n \in \mathbb{N}$, $U \in \Delta_n$, $r > 0$ tais que

- $p \in U \cap \{x : \tilde{f}_U(x) > 0\} \Rightarrow \tilde{f}_U(p) > 0$
- $\forall x \in U$, $f(x) \geq r$

$U \cap \{x : \hat{f}_U(x) > 0\}$

Logo

$$\int f \, d\mu_p = \hat{\tilde{f}}(p) =$$

$$= \lim \left[\frac{1}{n} \left(f(p) + f(T(p)) + \dots + f(T^{n-1}(p)) \right) \right]$$

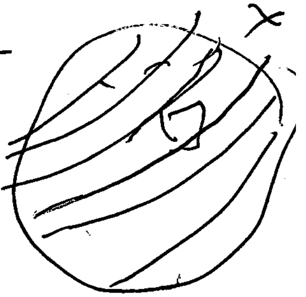
$$\geq \lim \left[\frac{1}{n} \left[r \cdot \{ f_U(\cancel{p}) + f_U(\cancel{T}(p)) + \dots + f_U(\cancel{T}^{n}(p)) \} \right] \right]$$

$$\geq \lim \left[\frac{1}{n} \left(r \{ f_U(p) + f_U(T(p)) + \dots + f_U(T^{n-1}(p)) \} \right) \right]$$

$$= r \cdot \tilde{f}_U(p) > 0 \quad //$$

$f_n \to f$ para μ-qtp x $\left\{ \begin{matrix} X \\ \Gamma \end{matrix} \right.$

$\Downarrow$ conv. dom. $\{f_n\}$ unif. limitada + limit.



$$\int |f_n - f| \, d\mu \to 0$$

Birkhoff.

$$\int |\tilde{f}_n - \tilde{f}| \, d\mu = \int |\widetilde{f_n - f}| \, d\mu \leq \int |f_n - f| \, d\mu$$

$\Rightarrow \tilde{f}_{n_j}(x) \to \tilde{f}(x)$ converg. μ-qtp x para algum subseq. n_j

$$\int f \, d\mu_x \leftarrow \int f_{n_j} \, d\mu_x = \tilde{f}_{n_j}(x) \to \tilde{f}(x)$$

<u>Afirmação</u> $E(\mu)$ contem todas as funções mensuráveis limitadas
$$f : \Sigma_0(T) \longmapsto \mathbb{R}$$

<u>Lema</u>.- Seja $f : \Sigma_0(T) \longmapsto \mathbb{R}$ mensurável e limitada. Suponha que existe seq. $\{f_n : \Sigma_0(T) \longmapsto \mathbb{R}\}$ uniformemente limitada em $E(\mu)$ e tal que $f_n \longrightarrow f$ para μ-qtp x

Então $f \in E(\mu)$.

<u>Prova</u>:
$$\int f_n \, d\mu_x = \hat{f}_n(x) \quad \text{para } \mu\text{-qtp } x$$

porque $f_n \in E(\mu)$

$f: K \circlearrowleft$ contínua e localmente injetiva $\mu \in M(K)$. Uma função $F \in L^1(\mu)$ é jacobiano de f se, $\forall$ borelianos A tq. $f|_A$ é injetiva tem-se:

$$\mu(f(A)) = \int_A F \, d\mu$$

Obs. Se o jacobiano existir, ele é único qtp. e é denotado por $J_\mu f$.

Se $\psi \in C^0(K) = C^0(K, \mathbb{R})$, definimos $\mathcal{L}_\psi : C^0(K) \circlearrowleft$ por

$$(\mathcal{L}_\psi \varphi)(x) = \sum_{y \in f^{-1}(x)} e^{\psi(y)} \varphi(y)$$

Lema 1. - Seja $\nu \in \mathcal{M}(K)$ tal que $\mathcal{L}_\psi^* \nu = \lambda \nu$, $\lambda > 0$. Então

$$J_\nu f = \lambda e^{-\psi}$$

Seja $h > 0$ contínua e $\mu = h\nu$. Então

$$J_\mu f = \lambda e^{-\psi} \frac{h \circ f}{h}$$

<u>Prova:</u> Seja A boreliano tq $f|_A$ é injetiva. Tomemos seq. $\{h_n\}_{n\geq 1}$ em $C^0(K)$ tal que $h_n \longmapsto \chi_A$ qtp $[\nu]$ e $\|h_n\|_{C^0} \leq 2$ $\forall\, n \geq 1$. Então

$$\mathcal{L}_\psi(e^{-\psi} h_n)(x) = \sum_{y \in f^{-1}(x)} e^{\psi(y)} e^{-\psi(y)} h_n(y) = \sum_{y \in f^{-1}(x)} h_n(y)$$

~~Como $f^{-1} \circ f(A) = A$~~ ($f|_A$ é injetiva)

hip. do Teor.

~~Observar que se $x \in$ [illegible] $\Rightarrow \#\{f^{-1}(x)\}$ é finito~~

~~Das hipóteses do Teorema, ∃ $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall\, x \in K$, $\#\{f^{-1}(x)\} \leq N_0$ (Cobrir K por finitas bolas B_i $(i=0,\dots,N_0)$ tq. $f|_{B_i}$ é injetiva).~~

~~Se $x \in f(A)$ e $f^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_l\}$, com $y_1 \in A$ e $\{y_2, \dots, y_l\} \cap A = \emptyset$ então $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall\, n \geq k_0$ $h_n(y_j) = 0$~~