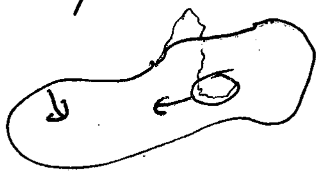
$M \subset \mathbb{R}^2$ região compacta

∂M suave $(\neq \emptyset)$.

$\exists\ f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tq $f^{-1}(0) = \partial M$
$f^{-1}[0,\infty) = M$

∇f aponta para interior de M



assim $p \in M$

$\mathfrak{X}^r = \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$, o conjunto dos campos vetoriais $X = (P, Q)$ de classe C^r em M, ou seja X é restrição de um campo veto C^r em $\mathbb{R}^2$

<u>Norma</u> em $\mathfrak{X}^r$

$$\|X\|_r = \sup_{p \in M} \{ |X(p)| + |DX_p| \dots + |D^r X_p| \}.$$

Definição: O sistema

$$x' = P(x, y)$$
$$y' = Q(x, y)$$

ou o campo vetorial $X = (P, Q) \in \mathfrak{X}^r$

é estruturalmente estável se

$\exists\, \delta > 0$ tal que $\forall\, Y \in \mathfrak{X}^r$ com

$\|Y - X\|_r < \delta$ existe homeo

$h = h_Y : M \to M$ tal que

h_Y leve ~~cada~~ toda trajetória de X/M

sobre uma trajetória de Y/M.

(preservando orientação).

Definição:

$\Sigma(i)$ $i = 1, 2, 3, 4$ denotará o

conjunto de campos vetoriais $X \in \mathfrak{X}^r(M)$

tais que

$\Sigma(1)$: Todos os pontos sing. de X são hiperbólicos e estão contidos em $int(M)$

$\Sigma(S)$

$\Sigma(2)$: Todas as órbitas periódicas de X são hiperbólicas e estão contidas em $int(M)$

$\Sigma(P)$

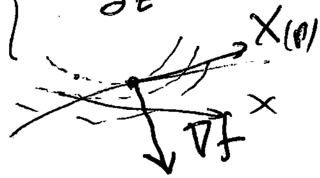
$\Sigma(3)$: Exceto por finitos pontos de contato parabólico, X é transversal a ∂M

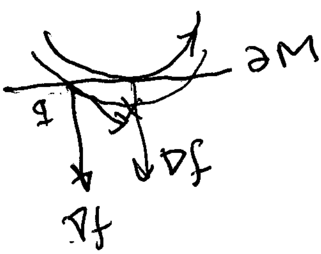
$\Sigma(T)$

$\varphi(0,p) = p \in \partial M$

$\varphi(t,p)$

contato parabólico $\left\{ \; \dfrac{\partial(f\circ\varphi(t,p))}{\partial t} = 0 \right.$





$$\frac{\partial^2(f\circ\varphi(t,p))}{\partial t^2} \neq 0$$

$$\frac{\partial^2 f\circ\varphi(t,p)}{\partial t^2} < 0 \iff \text{tang. externa}$$

$\nabla f_q \cdot X(q) > 0$

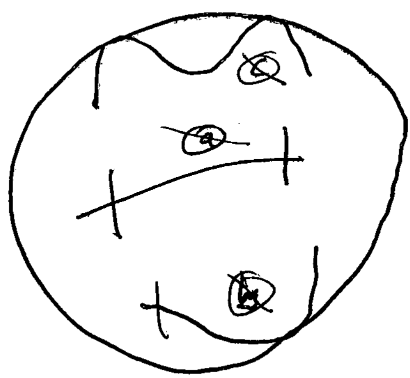
$$\frac{\partial^2 f\circ\varphi(t,p)}{\partial t^2} > 0 \iff \text{tang interna}$$

$\Sigma(4)$:

(a) Não há ligação de selas

(b) Não há tray. de X que tangencia ∂M se ela tem como α ou ω-limite um ponto de sela

(c) Não há tray. de X que tangencia ∂M em dois pontos distintos



Teoremas principais

Teorema 1 O conjunto $\Sigma^r = \Sigma^r(M)$ definido por
$$\Sigma^r = \bigcap_{i=1}^{4} \Sigma(i)$$
é aberto e denso em $\mathfrak{X}^r$, $r \geq 1$.

Teorema 2 Todo $X \in \Sigma^r$ é ~~estrut.~~ estruturalmente estável

Teorema 3 $X \in \mathfrak{X}^r$ é estruturalmente estável $\Leftrightarrow$ $X \in \Sigma^r$.

Proposição 1 $\Sigma^r(M) = \bigcap_{i=1}^{4} \Sigma^r(i)$ é aberto em $\mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$ ~~e todo $X \in \Sigma$~~ e está formado de campos vetoriais estruturalmente estáveis.

Proposição 2 – M região compacta e convexa de $\mathbb{R}^2$, com ∂M de classe C^2. Seja X um campo de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.

Então o conjunto

$$\mathcal{X}_1(X) = \{ (v,\theta) \in \mathbb{R}^2 : R_\theta(X+v) \notin \Sigma^1(M) \}$$

onde $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\Sigma^1(M) = \bigcap_{i=1}^{4} \Sigma^1(i)$

tem medida de Lebesgue nula em $\mathbb{R}^3$.

Prova: Seja $K(X)$ o conjunto de valores críticos de $X|_M$, isto é o conjunto dos v tais que para algum ponto $p \in M$, $X(p) = v$ e DX_p não é sobrejetiva, i.e. $\Delta(X)(p) = \operatorname{Det}(DX_p) = 0$. Pelo Teorema de Sard [Aplicação $X : U \underset{\text{aberto}}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tem que ser de classe $n-m+1$. No nosso caso $n = m = 2$ assim ~~bastaria~~ que $X \in C^1$], $K(X)$ tem medida nula. Como $X(\partial M)$ também tem medida nula

$$\Rightarrow \quad C(X) = K(X) \cup X(\partial M)$$

tem medida nula em $\mathbb{R}^2$.

Afirmação

(**) 1) Se $-V \in \mathcal{C}(X)$ então $\mathcal{X}_1^1(X,V) = \{\theta \in \mathbb{R} : R_\theta(X+V) \notin \Sigma^1(\ldots)\}$ tem medida nula em $\mathbb{R}$

Prova

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$D\left(R_\theta \circ (X+V)\right)_{(p)} = R_\theta \cdot DX(p)$$

Como $-V \in \mathcal{C}(V) \Rightarrow \det(DX(p)) \neq 0$

(a) se $DX(p) < 0 \Rightarrow \det(R_\theta \cdot DX(p)) < 0$
$\Rightarrow p$ é sela hiperbólica do $R_\theta(X+V)$

Seja $\sigma(\theta) = \text{Traço}\left[D(R_\theta \circ (X+V))_{(p)}\right] = \text{Traço}\, R_\theta \circ DX(p)$

(b) Se $DX(p) > 0$ então $\det D(R_\theta \circ DX)_{(p)} > 0$

(b.1) $DX(p) > 0$ e $\sigma(\theta) < 0 \Rightarrow p$ é atrator hiperbólico

(b.2) $DX(p) > 0$ e $\sigma(\theta) > 0 \Rightarrow p$ é fonte hiperbólica.

(b.3) $\begin{cases} DX(p) > 0 \\ \sigma(\theta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \sigma'(\theta) \neq 0$. De fato

$$R_\theta \circ DX(p) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x & P_y \\ Q_x & Q_y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma(\theta) = \cos\theta \cdot P_x + \operatorname{sen}\theta \cdot Q_x - \operatorname{sen}\theta\, P_y + \cos\theta\, Q_y$$
$$= -\operatorname{sen}\theta\,(P_y(p) - Q_x(p)) + \cos\theta\,(P_x(p) + Q_y(p))$$

~~$P_x + P_y$~~

$$\sigma'(\theta) = -\cos\theta\,(P_y - Q_x) - \operatorname{sen}\theta\,(P_x + Q_y)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma(\theta) \\ \sigma'(\theta) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P_y - Q_x \\ P_x + Q_y \end{pmatrix}$$

Assim $\begin{pmatrix} \sigma(\theta) \\ \sigma'(\theta) \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} P_y = Q_x \\ P_x = -Q_y \end{matrix}$

$$0 < \begin{vmatrix} P_x & P_y \\ Q_x & Q_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_x & P_y \\ P_y & -P_x \end{vmatrix} = -P_x^2 - P_y^2 \leq 0$$

$$\boxed{\not\Rightarrow \quad \Leftarrow}$$

Dado p sing. de $X+V$

o conjunto dos $\theta \in \mathbb{R}$: $R_\theta(X+V) \notin \Sigma'(M)$ é discreto (tem medida nula em $\mathbb{R}$

$\{p \in M : p$ é sing de $X+V\}$ é finito

M = compacto e p é sing simples de $X+V$

A afirmação segue direto.

Afirmação 2

$$\mathcal{H}_1^2(X,V) = \{\theta \in \mathbb{R} : R_\theta(X+V) \notin \Sigma^*(2)\}$$

tem medida nula em $\mathbb{R}$

Prova $\mathcal{X}_1^2(X,V)$ é união dos conjuntos seguintes

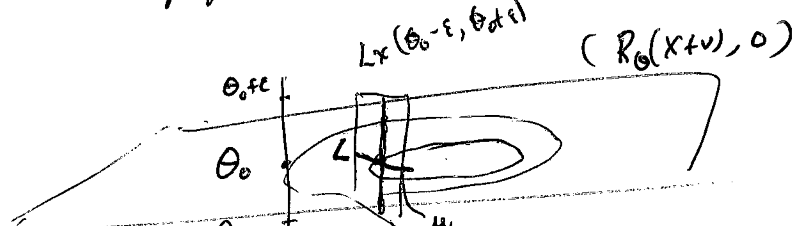
(A) de números θ tais que $R_\theta(X+V)$ tem pelo menos uma órbita periódica não hiperbólica contida em int M.

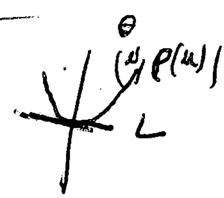
(B) de números θ tais que $R_\theta(X+V)$ tem alguma órbita periódica tangente a ∂M.

Verifiquemos inicialmente que

$$S_V = \{(x,\theta) \in M \times \mathbb{R} : R_\theta(X+V) \text{ tem órbita periódica por } x\}$$

é uma superfície regular de classe C^1.





De fato, para cada $(x_0, \theta_0) \in S_V$ (10)

seja $\Pi(u, \theta)$ a transf. de Poincaré associada a órbita periódica por (x_0, θ_0) do campo em $\mathbb{R}^3$

$$(R_\theta(X+v), 0)$$

numa seção transversal $\Omega = L \times (\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon)$.

Tem-se que

$$\Pi(u, \theta) = (\pi(\mu, \theta), \theta)$$

onde $\pi(\mu, \theta)$ é a transf. de Poincaré em L associada a $R_\theta(X+v)$.

Formula:

$$\frac{\partial \pi}{\partial \theta}(x_0, \theta_0) = \int_0^T \exp\left[-\int_0^t \operatorname{div} X\right] |X+v|^2 \, dt > 0$$

Dada a func $\Omega \to \mathbb{R}$

~~$\Pi(x_0, \theta_0)$~~ =

$$(u, \theta) \to \pi(u, \theta) - u$$

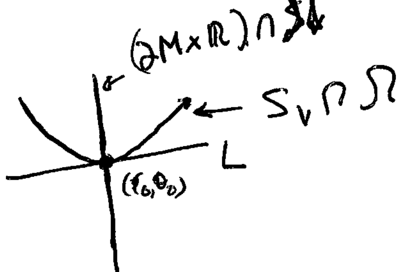
$$\pi(u_0, \theta_0) - u_0 = 0$$

$$\Pi(u, p(u)) - u = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \theta}(x_0, \theta_0) > 0$$

$$\theta = p(u)$$

Logo, $S_v \cap \Omega = \{\pi(u,\theta) = u\}$ é localmente o gráfico de uma função $\theta = p(u)$. Isto prova que se (x_0, θ_0) pertence a $\partial M \times \mathbb{R} \cap S_v$ então S_v é nesse ponto transversal a $\partial M \times \mathbb{R}$



Por outro lado se $\theta = p(u)$ é uma expressão local para S_v, $\left(\pi(u, p(u)) \equiv u\right)$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \pi}{\partial u} = 1$$

Logo $\dfrac{\partial \theta}{\partial u} = 0 \iff \dfrac{\partial \pi}{\partial u} = 1$, ou seja a órbita periódica da $R_\theta(X+v)$ pelo ponto $(u, \theta = p(u))$ não é hiperbólica).

i.e.

Assim ~~localmente~~ os valores críticos de $\theta = p(A)$ correspondem a órbitas periódicas não hiperbólicas.

Aplicando o Teorema de Sard concluimos a prova pois

A é conjunto dos valores críticos de

$$S_V \cap (\mathrm{int}(M) \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \leftarrow \theta \text{ coordenada}$$

B é um conjunto discreto de pontos por causa ~~da~~ da transversalidade de S_V com $\partial M \times \mathbb{R}$

<u>Afirmação 3</u>

$$\mathcal{X}_1^3(X, v) = \{\theta \in \mathbb{R} : R_\theta(X+v) \notin \Sigma^1(3)\}$$

tem medida nula em $\mathbb{R}$.

Consideremos o conjunto

$$T_Y = \{(p,\theta) \in \partial M \times [0,\pi] : [R_\theta(X+v)\cdot\nabla f]_{(p)} = 0\}$$

Vejamos que T_V é uma curva regular. Seja $Y = R_\theta(X+V)$, θ fixo.

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(R_\rho Y\cdot\nabla f)_{(p)}\Big|_{\rho=0} = (Y^{\perp}\cdot\nabla f)_{(p)} \neq 0$$

$$R_\rho = \begin{pmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$R_\rho'\Big|_{\rho=0} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_1\\ V_2\end{pmatrix}$$

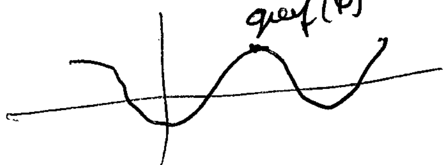
$$R_\rho'\Big|_{\rho=0}\begin{pmatrix}Y_1\\ Y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Y_1\\ Y_2\end{pmatrix}$$

$$= (Y_2, -Y_1)$$

Isto prova que T_V é curva regular

localmente

$T_V = \{ (p, \theta(p)) : \theta : V_p \to \mathbb{R} \}$



A provar $\theta_0 = \theta(p)|_{p=0}$

$$\frac{d}{dp}\Big(\nabla f(p) \cdot R_{\theta_0}(X+V)(p)\Big)_{p=p_0} \neq 0$$

$$\frac{d}{dp}\Big(\nabla f(p) \cdot R_{\theta(p)}(X+V)(p)\Big) \equiv 0$$

$$\frac{d}{dp}\big(\nabla f(p_0)\big) \cdot R_{\theta_0}(X+V)(p_0) + \nabla f(p_0) \cdot R_{\theta_0} D(X+V)(p_0) \quad (*)$$

$$+ \underbrace{\nabla f_{p_0} \cdot R'_{\theta(p_0)}(X+V)(p)}_{\neq 0} \cdot \theta'(p_0) \equiv 0$$

$$\boxed{(*) \neq 0 \iff \theta'(p_0) \neq 0}$$

ok

4) $\Sigma_1^4(X,v) = \{\theta \in \mathbb{R} : R_\theta(X+v) \notin \Sigma^1(4)\}$

tem medida nula em $\mathbb{R}$

$$\Sigma_1^4(X,v) = A \cup B \cup C$$

$A = \{\theta \in \mathbb{R} : R_\theta(X+v)$ tem ligações de selas $\}$

$B = \{\theta \in \mathbb{R} : R_\theta(X+v)$ tem separatriz de sela que tangencia ∂M

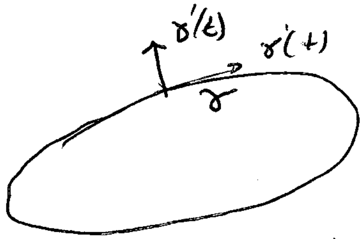
$C = \{\theta \in \mathbb{R} : R_\theta(X+v)$ tem trajetória de X que tangencia ∂M em dois pontos distintos

X é top. s.s. e tem órbita periódica γ, então γ é hiperbólica.

<u>Prova</u>: Suponha por contradição que γ não é hiperbólica. Como γ é de classe $C^{\pi+d}$

$\exists \; F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tq.

$F(p)=0$ e $DF_p \neq 0 \quad \forall p \in \gamma$



Considere a seguinte perturbação de X

$$X_\varepsilon = X + \psi \varepsilon F \cdot \nabla F$$

onde $\psi: \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ é C^∞ se anula fora de uma viz. de γ e é igual a 1 em γ. Tem:

$$\operatorname{div} X_\varepsilon|_\gamma = \operatorname{div} X|_\gamma + \varepsilon |\nabla F|^2_\gamma$$

$(\text{pois } F|_\gamma \equiv 0)$

e portanto, se $\int_\gamma \operatorname{div} X = 0$ é

γ é atrator de X, tomando $\varepsilon > 0$, tem

$$\int_\gamma \operatorname{div} X_\varepsilon = \varepsilon \int_\gamma |\nabla f|^2 > 0$$

$\Rightarrow$ γ é uma órbita periódica repulsora de X_ε.

Suponha que $p \in \partial M$ é ponto de contato não parabólico

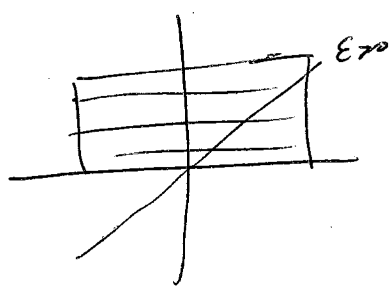
$M \supset \{(x,y) : 0 \leq y < 1, \ -1 < x < 1\}$

$\partial M \supset \{(x,y) : 0 = y, \ -1 < x < 1\}$

$X = (P, Q)$ $\qquad f(x,y) \equiv y$

$(X \cdot \nabla f)_{(x,0)} = Q(x,0)$

$\frac{\partial}{\partial x}(X \circ \nabla f)_{(0,0)} = \frac{\partial Q}{\partial x}(0,0) = 0$



~~$X = \dots$~~ x

$$Y_\varepsilon = (0, y\varepsilon x)$$

$$(X + Y_\varepsilon)\cdot \nabla f = Q(x,0) + y\varepsilon x$$

$$\left((X + Y_\varepsilon)\cdot \nabla f\right)_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((X + Y_\varepsilon)\cdot \nabla f\right)_{(0,0)} = Q_x(0,0) + \varepsilon$$

$\cancel{\varepsilon < 0}$

$\varepsilon < 0$

∂M

tangencia externa

∂M $\qquad \varepsilon > 0$

tan