(11)

No caso que φ é ergódica $f = f_A$

$$\tilde{f}_A(x) = \mu(A) \quad \text{q.t.p } x \in X$$

A ser provado: são ergódicos:

- A transformação de Gauss
- transformações lineares expansoras.

Aplicação

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua

$0 < x < 1$

$x = 0.a_1 a_2 a_3 \dots$ expressão decimal

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= 0.a_2 a_3 a_4 \\ x_3 &= 0.a_3 a_4 \dots \\ &\vdots \\ x_n &= 0.a_n a_{n+1} \dots \end{aligned}\right\}$$

$T : [0,1] \to [0,1]$

$\varphi_{10}(x) = T(x_1) = x_2$

$x_1 = 0.a_1 a_2 \dots$

$x_2 = 0.a_2 \dots$

afirmamos que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} = \int_0^1 f(t)\,dt$$

$$\psi_{10}^{n-1}(x) = x_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0)+\dots+f(x_n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(\psi_{10}^{j}(x)) = \tilde{f}(x)$$

qtp $x \in (0,1)$

$$\tilde{f}(x) = \int_0^1 f(t)\,dt \quad \text{qtp } x \in (0,1)$$

Aplicação 2. – da ergodicidade da transformação de Gauss:

Seja $0 < x < 1$

$$\tau_m(x,k) = \frac{1}{m} \# \{1 \le j \le m \,/\, n_j(x) = k\}$$

percentagem que o inteiro k aparece nos primeiros m elementos

Afirmação $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \tau_m(x,k) = \frac{1}{\log 2} \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$

$\tau_m(x,k)$ = percentagem que o inteiro k aparece nos primeiros m elementos = tempo medio de estadia de x em $I_k = \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$

$n_j(x)$ está determinado pela condição

$$\varphi^j(x) \in I_{n_j(x)}$$

$$\varphi^j(x) \in I_k \iff n_j(x) = k \qquad (x = \text{irracional})$$

φ ergódico $\Rightarrow$ μ-q.t.p. $x \in X$

$$\lim_{m\to\infty} \tau_m(x,k) = \mu(I_k) =$$

$$= \frac{1}{\log 2} \int_{(k+1)^{-1}}^{k^{-1}} \frac{1}{t+1}\, d\lambda = \cancel{\frac{1}{\log 2}} \quad \cancel{\log \frac{k^{-1}+1}{(k+1)^{-1}+1}}$$

$$= \frac{1}{\log 2} \log(t+1) \Big|_{(k+1)^{-1}}^{k^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{\log 2} \log \frac{k^{-1}+1}{(k+1)^{-1}+1} = \frac{1}{\log 2} \log \frac{\frac{1+k}{k}}{\frac{2+k}{k+1}}$$

$$= \frac{1}{\log 2} \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$$

para μ-q.t.p $x \in (0,1)$

Como $\mu \simeq \lambda$

o mesmo vale λ-q.t.p $x \in (0,1)$.

~~Uma definição~~:

Obs a integral de uma função é aproximada por sua media sobre conj. grande de pontos tomados aleatoriamente ~~sobre~~ no seu dominio

espaço top. borelian.

$$(X, \mathcal{B}, \mu)$$

Mais precisamente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \longrightarrow \int f\,d\mu$$

q.t.p em algum sentido a precisar.

em algum sentido a precisar

para quase toda seq de pontos $x_1 \dots x_n \dots$

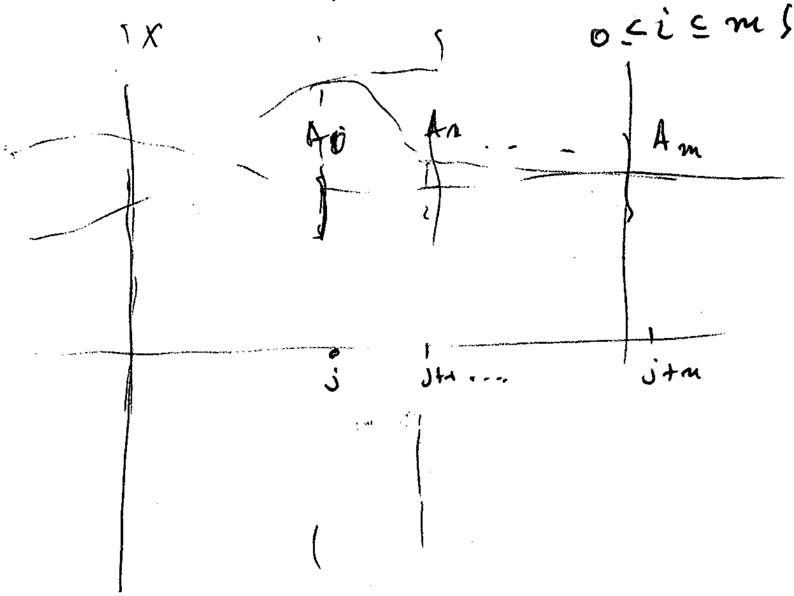
$B(X) = \underline{\underline{X}}^{\mathbb{Z}}$ $\qquad X^{\mathbb{Z}^+} = B^+(X)$

$\theta \in X^{\mathbb{Z}}$ $\qquad \theta : \mathbb{Z} \to X$ .. seq. em X

$B(X)$. algebra $\qquad \prod_{i=1}^{\infty} X$

cilindros , $A_0, \dots, A_m \in \mathcal{A}$

$$C(j, A_0, \dots, A_m) = \{ \theta \in B(X) / \theta(j+i) \in A_i \quad 0 \le i \le m \}$$



$(C(j, A_0, \dots A_m))^c$ = união finita de cilindros disjuntos da forma

16

$C(j, B_0, \dots, B_m)$

$B_i = A_i$ ou $B_i = A_i^c$

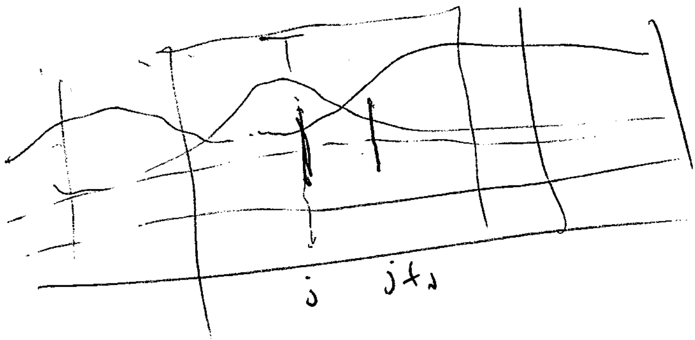
Exemplo:

$$C(j, A_0, A_1)^c = C(j, A_0^c, A_1) \cup C(j, A_0, A_1^c) \cup C(j, A_0^c, A_1^c)$$

$\theta \in \mathcal{B}(X)$ $\quad \theta(j) \in \begin{cases} A_0 \\ A_0^c \end{cases}$

$\theta(j+1) \in \begin{cases} A_1 \\ A_1^c \end{cases}$

$\theta(k) \in X \qquad k \neq j, j+1$



União finita de cilindros (disjuntos ~~...~~ não ~~...~~) 15

pode ser expressa como união de cilindros disjuntos

<u>Conclusão :</u> União disjunta de cilindros

formam um algebra. $\mathfrak{A}_0$

$\mathfrak{A}$ algebra gerada por $\mathfrak{A}_0$

$(B(X), \mathfrak{A}, \nu)$

$\nu\left(C[j, A_0, \ldots, A_m] \right) = \mu(A_0) \cdot \mu(A_1) \cdots \mu(A_m)$

ν extende a uma medida em $\mathfrak{A}$.

<u>Abstraer um pouco</u>

$\mathcal{S}$ semi-algebra de subconjuntos de X

1) $\emptyset \in \mathcal{S}$

2) $A_1, A_2 \in \mathcal{S} \Rightarrow A_1 \cap A_2$ ~~2) $A_1, A_2 \in \mathcal{S} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{S}$~~

3) $A \in \mathcal{S}$ $\quad A^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ $, A_i \in \mathcal{S}$

cilindros forma uma semi-algebra

$C_1 = C(j, A_0, \dots, A_m)$

$C_2\ C(j, B_0, \dots B_m)$

$$C_1 \cap C_2 = C(j, A_0 \cap B_0, \dots, A_m \cap B_m)$$

Teorema. $\mathcal{S}$ é semi-algebra de subconj. de X. A algebra $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ gerada por $\mathcal{S}$ consiste precisamente de aqueles subconjuntos de X que podem ser escritos na forma

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad A_i \in \mathcal{S}$$

e $A_1, \dots, A_n$ subconjuntos disjuntos de X

Teorema Se $\mathcal{S}$ é semi-algebra de subconjuntos de X e $\mu : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^+$ é finitamente aditiva

$\mu(\emptyset) = 0$
$\forall A_i \in \mathcal{S}$

$$\mu(\uplus A_i) = \sum \mu(A_i)$$

$\exists$ extensão $\mu_1 : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \to \mathbb{R}^+$

μ_1 é ~~conta~~ aditiva se μ o for.

$$\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$