Aula #4

Obs 1. Na prova só usamos que

$$T^{-1}(B) \subset B \Rightarrow \mu(B) = \mu(T^{-1}(B))$$

Obs. 2 O resultado não vale se μ não é finita

$$T: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad T: x \to x + a$$

$$E = [0,1], \quad \mu(E) = 1$$

$$\mu(E_N) = \infty, \quad \forall N$$

porem $\bigcap E_N = \phi$

Obs. 3 $(X, \mathcal{Q}, \mu)$ esp. prob.

$T: X \to X$ mensuravel que preserva μ

$TX = X \mod 0$

∴ De fato, $\mu(U) = 1$, onde $U = \{x \in X \mid x$ volta à U inf. vezes$\}$

$U \subset TX \Rightarrow X \setminus T(X)$ tem medida zero

$[X \setminus T(X) \subset X \setminus U]$.

<u>Def.</u>– $T: X \to X$, X esp. topológico

$x \in X$ é recorrente (ω-recorrente)

se $\cancel{x}$ $\in \omega(x)$ isto é: $\forall$ viz U de x

$\exists$ seq $n_i \to \infty$ de naturais tq

~~de~~ $T^{n_i}(x) \in U$.

<u>Teor: de Recorrencia de Poincaré</u> (Versão ~~probabilística~~: topologica).

$(X, \mathcal{B}, \mu)$ esp. de probab.

X = espaço ~~métrico~~ top. com base enumerável

$\mathcal{B}$ = algebra dos borelianos

$\mu(X) = 1$.

$T: X \to X$ mensurável que preserva μ.

Então $\mu(\underbrace{\{x \mid x \notin \omega(x)\}}_{\in \mathcal{B}}) = 0$.

Dem.- Seja $(U_n)_1^{\infty}$ base numerável de abertos para a topologia.

o que é

$$U_n \cap T^{-1}(X \setminus U_n) = \{x \in U_n \text{ tais que } Tx \notin U_n\}$$

$$U_n \cap T^{-2}(X \setminus U_n) = \{x \in U_n \text{ tais que } T^2 x \notin U_n\}$$

$$U_n \cap \left(\bigcap_{k=1}^{N} T^{-k}(X \setminus U_n)\right) = \{x \in U_n \text{ tais que } \emptyset = U_n \cap \{T(x), T^2(x), \dots T^N(x)\}\}$$

(~~Pontos de U_n que voltam infinitas~~

Assim se $\quad Rec(T) = \{x \,/\, x \in \omega(x)\}$

$$X \setminus Rec(T) \supset U_n \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} T^{-k}(X \setminus U_n)\right)$$

$$X \setminus Rec(T) \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(U_n \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} T^{-k}(X \setminus U_n)\right)\right)$$

Também $x \in X \setminus Rec(T)$ $\exists$ viz $U_n \ni x$ tq $\{Tx, T^2(x), \dots, T^N(x), \dots\} \cap U_n = \emptyset$

i.e. $$X \setminus Rec(T) = \overbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(U_n \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} T^{-k}(X \setminus U_n)\right)\right)}^{\text{mensurável}}$$

1) se $\mu(U_n)=0 \Rightarrow \mu\left(U_n \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} T^{-k}(X\setminus U_n)\right) = 0$

2) se $\mu(U_n)>0$, pela versão probabilística

μ-q.t.p $x \in U_n$ volta infinitas vezes a U_n

$$U_n \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} T^{-k}(X\setminus U_n)\right) = \{x \in U_n \text{ tais que } \{Tx, T^2x \dots T^N(x) \dots\} \cap U_n = \phi\}$$

(que não voltam nunca)

$$\Rightarrow \mu\left(U_n \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} T^{-k}(X\setminus U_n)\right)\right) = 0$$

conclusão de (1) e (2)

$\Rightarrow$ $\cancel{\mu\left(U_n \cap \complement_{U_n}\left\{\bigcap_{k=1}^{\infty} T^{-k}(X\setminus U_n)\right\}\right) ?}$

Assim $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(U_n \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} T^{-k}(X\setminus U_n)\right)\right)\right) = 0$

$\|$

$\mu(X \setminus \mathrm{Rec}(T)) = 0$