Formula Variacional

Sejam $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ um espaço de probabilidade, onde $\mathcal{B}(X)$ é a algebra dos borelianos do espaço metrico compacto X. Seja

$$T : X \to X$$

uma aplicação continua

Teorema:

$$h_{top}(T) = \sup_{\mu \in M_T(X)} h_\mu(T)$$

Lema 1.- Se $\alpha = \{A_1, \dots A_k\}$ é partição de $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ então

$$H(\alpha) \leq \log k = \log(\# \alpha)$$

$$\log k = -\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} \log\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{k} \phi\left(\frac{1}{k}\right) \qquad \text{onde } \phi(x) = x \log x$$

$$= -k\, \phi\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$= -k\, \phi\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i\right) \qquad \text{onde } x_i = m(A_i)$$

$$= -k\, \phi\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} x_i\right)$$

$$\geq -k \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} \phi(x_i) \qquad \text{convexidade de } \phi$$

$$= -\sum_{i=1}^{k} \phi(x_i) = H(\alpha)$$

(X, d) espaço métrico compact

$T: X \to X$ mensurável com relação ao algebra dos borelean

$$h_{top}(T^m) \leq m\, h_{top}(T)$$

<u>Proposição</u>: se $\mu \in M_T(X) \Rightarrow$

$$h_\mu(T) \leq h_{top}(T)$$

Seja $\alpha = \{~~A_1~~, \dots A_k\}$ partição finita mensurável de $(X, \mathcal{A} = \text{borelean})$, para cada $i = 1, \dots k$ se escolher compacto $B_i \subset A_i$ tq

$\beta = \{B_0, B_1, \dots, B_k\}$, com $B_0 = X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B_i$

então $$H_\mu(\mathcal{A} / \beta) < 1$$

<u>Af 1</u>.- $$h_\mu(T, \alpha) \leq h_\mu(T, \beta) + 1$$

De fato

~~Observemos~~ que

$$H_\mu\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha \Big/ \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\beta\Big) \le \cancel{H\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha \Big/ \beta\Big)} \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1} H_\mu\Big(T^{-i}\alpha \Big/ \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\beta\Big)$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1} H_\mu\Big(T^{-i}\alpha \Big/ T^{-i}\beta\Big)$$

$$= n\, H_\mu(\alpha|\beta)$$

Assim

$\cancel{H}$

$$h_\mu(T,\alpha) - h_\mu(T,\beta) \le H_\mu(\alpha|\beta) \le 1$$

Seja $2\delta = \min_{\substack{i\neq j\\ i,j\neq 0}} d(B_i, B_j)$

Dado $n \in \mathbb{N}$ seja E_n um $(n;\delta)$-gerador para T de cardinalidade $x(n;\delta)$

Escolham em cada átomo (não vazio) de $\bigvee_{i=1}^{n-1} T^{-i}\beta$

exatamente um ponto $x_i^{(n)}$.

tem assim um conjunto finito $\{x_1^{(n)},\dots,x_{\ell_n}^{(n)}\}$

Seja $f: \{x_1^{(n)},\dots,x_i^{(n)},\dots,x_{\ell_n}^{(n)}\}\to E_n$

uma aplicação t.q.

$$f(x_i^{(n)}) = y \Rightarrow d_n(x_i^{(n)},y)\le\delta.$$

Esta aplicação existe porque E_n é $(n;\delta)$-gerado para T

<u>Afirmação</u>: $\forall\, y\in E_n$ $\quad \mathrm{card}\,(f^{-1}(y))\le 2^n$

$\dot{y}$ $\qquad \dot{T}(y)$

$i\neq j \Rightarrow$

$$\big(\mathcal{B}(x_i^{(n)}),\ \mathcal{B}(T(x_i^{(n)})),\dots,\ \mathcal{B}(T^{n-1}(x_i^{n}))\big)$$

$$\neq$$

$$\big(\mathcal{B}(x_j^{(n)}),\ \mathcal{B}(T(x_j^{(n)})),\dots,\ \mathcal{B}(T^{n-1}(x_j^{n}))\big)$$

$$\mathcal{B}_n(x_i^{(n)}) = \bigcap_{j=0}^{n-1} T^{-j}\mathcal{B}(T^j(x_i^{(n)}))$$

Segue disto que $\forall n$.

$$\mathrm{card}\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\beta\right) \cancel{\mathrm{card}(\ldots)} \leq 2^n \, \Omega(n;\delta)$$

Lema 1

Assim:

$$H_\mu\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\beta\right) \leq \log \mathrm{card}\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\beta\right) \leq \log\left[2^n \, \Omega(n;\delta)\right]$$

$\Rightarrow$ dividindo por $\frac{1}{n}$ e fazendo $n \to \infty$

$$h(T,\beta) \leq \log 2 + \limsup \frac{1}{n} \log \Omega(n;\delta)$$

$$\Rightarrow \quad h(T,\alpha) \leq h_{top}(T) + 1 + \log 2$$

$$\leq h_{top}(T) + 3$$

$\forall$ partição α e todo T mensurável.

$$h_\mu(T) \leq h_{top}(T) + 3$$

$$m\, h_\mu(T) = h_\mu(T^m) \leq h_{top}(T^m) + 3 \leq m\, h_{top}(T) + 3$$

$\forall\, m > 0$

$$h_\mu(T) \leq h_{top}(T) + \frac{3}{m}$$

$$\Rightarrow h_\mu(T) \leq h_{top}(T).$$