(1)

Def. – $\left\{ \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \right.$ $1 \leq p < \infty$

$= \{ f : X \to \mathbb{C}$ mensuráveis tq. $|f|^p$ é integrável$\} / \sim$

$f \sim g$ se $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$

$\{x : f(x) \neq g(x)\} = (f-g)^{-1}(\mathbb{C} - \{0\})$

é mensurável.

$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ é espaço de Banach.

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ desigualdade de de Minkowski

$\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) = \{ f : X \to \mathbb{C}$ mensuráveis limitadas q.t.p.

$|f| \leq K$ q.t.p. $x \in X \} / \sim$

②

$\|f\|_\infty = \inf\{K \mid |f| \leq K \text{ q.t.p.}\}$

L^p é espaço de Hilbert ~~⇔~~ $p=2$

$\|f\|_2 =$

$\langle f, g\rangle_2 = \int f\bar{g}\, d\mu$

Teorema da convergência monótona:

$(X, \mathcal{A}, \mu)$

$x \in X \setminus F$ $\mu(F)=0$

$\left\{\begin{array}{l} f_n : X \to \mathbb{R} \text{ integráveis} \\ f_n \text{ monótona crescente} \\ \sup_n \int f_n\, d\mu < \infty \end{array}\right.$

$f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n$ μ-q.tp x

existe $G \supset F$ $\mu(G)=0$

$\forall x \in G$ existe q.t.p. e é integrável

então $x \to \lim_n f_n(x) = f(x)$

$$\int \lim_n f_n\, d\mu = \lim \int_X f_n\, d\mu$$

Proposição $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de probabilidade

$T: X \to X$ mensurável,

μ é T-invariante $\left(\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A) \ \forall A \in \mathcal{A} \right)$

$\Leftrightarrow$ $\forall f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ tem-se

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f \circ T \, d\mu$$

Prova $\boxed{\Rightarrow}$ f_A, $A \in \mathcal{A}$

$f_A \circ T = f_{T^{-1}A}$ integrável

$$\int_X f_A \, d\mu = \mu(A) = \mu(T^{-1}(A)) = \int_X f_{T^{-1}A} \, d\mu$$

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{A_i}, \quad f \circ T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{T^{-1}A_i}$$

$$\int_X f \, d\mu = \sum \lambda_i \mu(A_i) = \sum \lambda_i \mu(T^{-1}A_i) = \int_X f \circ T \, d\mu$$

(4)

Se $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ arbitrária e $f \geq 0$

existe seq $\{f_n\}$ $f_n \uparrow f$ f_n simples.

q.t.p

$f : X \to \mathbb{R}, f \geq 0$

$$f_n = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n} & \text{se } \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}, \; i = 1, \dots n2^n \\ n & \text{se } f(x) \geq n \end{cases};$$

Então $\int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu < \infty$

Teor da conv. monótona $\Rightarrow$

$$\int f \, d\mu = \lim_n \int f_n \, d\mu$$

$$= \lim_n \int f_n \circ T \, d\mu$$

~~Teor da conv.~~ $f_n \circ T \uparrow f \circ T$

Teor da conv. monótona $= \int f \circ T \, d\mu$

$f \in \mathcal{L}^1$

$f = f^+ - f^-$, $f^\pm \in \mathcal{L}^1$ $f^\pm \geq 0$

$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$

$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$

$f \circ T = f^+ \circ T - f^- \circ T$

$$\int f \circ T \, d\mu = \int f^+ \circ T \, d\mu - \int f^- \circ T \, d\mu$$

$$= \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$$

$$= \int (f^+ - f^-) \, d\mu = \int f \, d\mu$$

$f = \mathrm{Re} f + i \, \mathrm{Im} f$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\quad f_A \in \mathcal{L}^1 \quad \forall A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A) = \int f_A \, d\mu = \int f_A \circ T \, d\mu = \int f_{T^{-1}A} \, d\mu$$

$$= \mu(T^{-1}(A))$$

falar de $R(f)$ ~~Teor. Conv. Dominada~~
$T: X \to X$ inv.

Teorema de Recorrência de Poincaré: (versão Probabilística)

Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de probabilidade

$T: X \to X$ preserva μ

$E \in \mathcal{A}$, $\mu(E) > 0$

Então Existe $F \in \mathcal{A}$, $F \subset E$, $\mu(F) = \mu(E)$

tq. $\forall x \in F$ $\exists$ $n_1 < n_2 < \dots$ em $\mathbb{Z}^+$

$T^{n_i}(x) \in F$ $\forall i$.

i.e.

todo $x \in F$ é recorrente em relação a E

Dem: Seja $N \geq 0$ e $E_N = \bigcup_{n=N}^{\infty} T^{-n}(E)$.

E_N é mensurável e

$$\bigcap_{N=0}^{\infty} E_N = \{ x\in X \text{ que retornan a } E$$
infinitas vez por
iterados positivos de $T\}$.

$x\in E_1 \Rightarrow T^{j}(x)\in E$ para algún j

$x\in E_N \Rightarrow T^{N}(x)\in E$ " " $j>N$.

$\cancel{x\in \bigcap_{N=0}^{\infty} E_N,\ N\to\infty \quad n_1<n_2<n_3\cdots \quad T^{n_1}(x)\in E \quad T^{n_2}(x) \cdots T^{n_3}(x)\in E}$

$$F = E\cap\left(\bigcap_{N=0}^{\infty} E_N\right)$$

$F=\{x\in E$ que retornan a E infinitas
veces por iterados de T

$x\in F \Rightarrow \exists\, n_1<n_2<n_3<\ldots$

$T^{n_i}(x)\in E$

$T^{n_1}(x)\in F$

$T^{n_2}(x)\in F\ \ldots$

$x\in F$

$\Rightarrow$

8

$x \in F = \cancel{\{x \in E} \quad \exists\ n_0 < n_1 < \dots$

$T^{n_i} x \in F$

---

afirmação $\mu(E) = \mu(F)$.

$$T^{-1} E_N = E_{N+1} \subset E_N$$

μ é T-invariante

$\forall N,$ $$\mu(E_N) = \mu(T^{-1} E_N) = \mu(E_{N+1})$$

$\Rightarrow$ $\mu(E_0) = \mu(E_N)$, com $E_0 \supset E_1 \supset \dots \supset E_N \supset \dots$

Como $\mu(X) < \infty$
$$\mu\left(\bigcap_0^\infty E_N\right) = \mu(E_0)$$

Logo $\mu(F) = \mu\left(E \cap \left(\bigcap_{N=0}^{\infty} E_N\right)\right)$
$$= \mu(E \cap E_0) = \mu(E) \quad \text{pois } E \subset E_0$$

Obs:

(9)

Teorema.- $\mathfrak{A}$ algebra de subconjunto de X e seja $\mu_1 : \mathfrak{A} \mapsto \mathbb{R}^+$ finitamente aditiva $\mu_1(X) = 1$. Então μ_1 é σ-aditiva se $\forall$ seq. decrescente $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$ de membros de $\mathfrak{A}$ com $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \phi$

tem-se $\mu_1(E_n) \mapsto 0$

aula #3

Nosso caso

$$B_j = C(j, A_0^1, A_1^1, \ldots, A_m^1)$$ blocos, tomando E_n = uniões finitas de blocos disjuntos

$$\bigcap C(j, A_0^n, A_1^n, \ldots A_m^n)$$

$$= C\left(j, \bigcap_n A_0^n, \ldots, \bigcap_n A_m^n\right)$$

para algum l

$$A\left(\bigcap_n A_l^n\right) = \phi \Rightarrow \mu\left(\bigcap_n A_l^n\right) \to 0$$

$$\boxed{\text{P. Fernandez 119}}$$

$\sigma : B(X) \longrightarrow B(X)$

$\sigma\,\theta(n) = \theta(n+1)$

$\sigma^{-1}\big(C(j, A_0, \ldots, A_m)\big) = C(j-1, A_0, \ldots A_m)$

$\forall A \in \mathcal{Q}$ = algebra gerada pelos blocos

$\sigma^{-1}(A) \in \mathcal{Q}$.

$\mu\big(\sigma^{-1}(C(j, A_0, \ldots, A_m))\big) = \mu(C(j, A_0, \ldots A_m))$

$\Rightarrow$ σ é mensurável e preserva μ.

shift de Bernoulli

. Será provado que σ é ergodico.

$F : \underset{X^{\mathbb{Z}^+}}{B(X)} \longrightarrow \mathbb{R}$

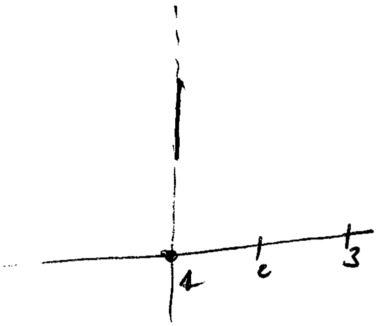
$F(\theta) = \cancel{g}(\theta(1))$

Af: F é integrável com respeito a ν.

$f: X \to \mathbb{R}$ integrál vel supr (......) $f \geq 0$

$F: X^{\mathbb{Z}^+} \to \mathbb{R}$

$F(\theta) = f(\theta(1))$



$f_n = \sum_{i=1}^{m_n} \lambda_{in} f_{A_{in}} \not\to f_{|U}$ $\qquad \mu(U)=1$

$A_i \subset U$

$\mu(A_{in} \cap A_{jn}) = 0, \quad i \neq j$

$C_{in} = C(0, A_{in}) \quad , i = 1, \dots m$

$F_n = \sum \lambda_i f_{C_{in}}$

Af:

$F_n(\theta) = f_n(\theta(1))$

$\int F_n \, d\nu = \int f_n \, d\mu$

$F_n(\theta) \to F(\theta) \qquad \forall \theta \in C(0, U)$

(22)

Observem que $\theta(1) \in A_{in} \Leftrightarrow f_{C_{in}}(\theta) = 1$

$$\theta(1) \in \text{algum } A_{in} \Rightarrow \begin{cases} F_n(\theta) = \lambda_{in} f_{C_{in}}(\theta) = \lambda_{in} \\ f_n(\theta(1)) = \lambda_{in} \end{cases}$$

$$\theta(1) \notin \bigcup_{i=1}^{m_n} A_{in} \Rightarrow \begin{cases} F_n(\theta) = 0 \\ f_n(\theta(1)) = 0 \end{cases}$$

Logo $\quad F_n(\theta) = f_n(\theta(1))$

$$\int F_n \, d\nu = \sum \lambda_i \nu(C_{in})$$
$$= \sum \lambda_i \mu(A_{in})$$
$$= \int f_n \, d\mu$$

e $\quad F_n(\theta) \to F(\theta) \quad \forall \theta \in C(0,\upsilon)$

$$\int_{B(X)} F \, d\nu = \int_X f \, d\mu$$

Será provado σ é ergódico:

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} F(\sigma^j(\theta)) = \int_{X^{\mathbb{Z}^+}} F\,d\nu = \int_X f\,d\mu$$

q.t.p. $\theta \in X^{\mathbb{Z}^+}$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} F(\sigma^j(\theta)) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(\theta(j+1)) = \int_X f\,d\mu$$