Algumas propriedades da entropia

(1)

resgunta

Proposição — Seja ∇ o espaço de todos as ~~subalgebra~~ partições $\mathcal{P}$ de um espaço de prob. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ com $H(\mathcal{P}) < \infty$ onde duas $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ são identificadas se $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \mod (0)$.

Então $d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = H(\mathcal{P}/\mathcal{Q}) + H(\mathcal{Q}/\mathcal{P})$ é uma métrica em ∇

---

(1) $d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{P} = \mathcal{Q} \mod 0$

(2) Sejam $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, M \in \nabla$

$$H(\mathcal{P}/M) \leq H(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}/M) = H(\mathcal{Q}/M) + H(\mathcal{P}/\mathcal{Q} \vee M)$$
$$\leq H(\mathcal{Q}/M) + H(\mathcal{P}/\mathcal{Q})$$

$$H(\mathcal{P}/M) \leq H(\mathcal{P}/\mathcal{Q}) + H(\mathcal{Q}/M)$$

$$H(M/\mathcal{P}) \leq H(M/\mathcal{Q}) + H(\mathcal{Q}/\mathcal{P})$$

$d(\mathcal{P}, M) \leq d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) + d(\mathcal{Q}, M)$ (des. Trians.

3 $d(\mathcal{P},Q)=d(Q,\mathcal{P})$

d è metrica.

Corolari: $(X,\mathcal{B},m)$ sp. prob.

$T: X\to X$ pres. mis.

$$|h(T,\mathcal{P})-h(T,Q)|\le d(\mathcal{P},Q)$$

$$\mathcal{P}\longrightarrow h(T,\mathcal{P})$$

$$\nabla\longrightarrow\mathbb{R}^+_0$$

è continua.

(P. Walters p. 94)

Lema: Seja $r \geq 1$ um inteiro fixo. Para cada $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que se

$\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_r\}$

$\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_r\}$

são duas partições qq. de $(X, \mathcal{B}, \mu)$ com r átomos e tq. $\sum_{i=1}^{r} \mu(P_i \Delta Q_i) < \delta$ então $H(\mathcal{P}/\mathcal{Q}) + H(\mathcal{Q}|\mathcal{P}) < \varepsilon$.

Prova Seja $\varepsilon > 0$ dado. Escolhamos $\delta > 0$ de modo que

$$\begin{cases} \delta < 1/4 \\ -r(r-1)\delta \log \delta - (1-\delta)\log(1-\delta) < \varepsilon/2 \end{cases}$$

Seja $\mathcal{M}$ a partição cujos átomos são os conjuntos $P_i \cap Q_j$ $\quad i \neq j$

e $\bigcup_{i=1}^{r} P_i \cap Q_i$

Então: (1) $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} = \mathcal{Q} \vee \mathcal{M}$

pois:

$Q_j \cap \left(\bigcup_{i=1}^{r} P_i \cap Q_i\right) \doteq Q_j \cap P_j \cap Q_j \doteq P_j \cap Q_j$

$\Rightarrow P_j \cap Q_j$ é átomo de $\mathcal{Q} \vee \mathcal{M}$

$$\cancel{H(M) = \sum_{i \neq j} \mu(P_i \cap Q_j) \log \mu(P_i \cap Q_j) + \mu\left(\bigcup_{i=1}^{r} P_i \cap Q_i\right) \log \mu\left(\bigcup_{i=1}^{r} P_i \cap Q_i\right)}$$

(2) Se $i \neq j$ $\quad P_i \cap Q_j \subset \bigcup_{n=1}^{r} P_n \Delta Q_n$

isto é $\quad \bigcup_{i \neq j} (P_i \cap Q_i) \subset \bigcup_{n=1}^{r} (P_n \Delta Q_n)$

De fato se $i \neq j$ $\quad P_i \cap Q_j \subset P_i \cap Q_i^c = P_i \setminus Q_i \subset P_i \Delta Q_i$

logo

(3) $\quad \mu\left(\bigcup_{i \neq j} P_i \cap Q_i\right) < \delta$

$\Rightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{r} P_i \cap Q_i\right) > 1 - \delta$

(4) $\quad H(M) < \varepsilon/2.$

De fato

$$Q_i \subset P_i$$

$$\mu(Q_i) \cong \mu(P_i)$$

$$\bigcup_{i=1}^{r-1} Q_i \subset \bigcup_{i=1}^{r-1} P_i$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{r-1} Q_i\right) \cong \mu\left(\bigcup_{i=1}^{r-1} P_i\right)$$

$$Q_r :\overset{\text{Def}}{=} X \setminus \bigcup_{i=1}^{r-1} Q_i$$

$\{Q_1, \ldots, Q_r\}$ é partição

$$\mu(Q_r) \cong \mu(P_r)$$

pois $Q_r \supset P_r$ e

$$\mu(Q_r) = \mu(P_r) + \mu\left(\bigcup_{i=1}^{r-1} P_i \Big/ \bigcup_{i=0}^{r-1} Q_i\right)$$

Pelo Lema

$$H(P/Q) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow H(P, \mathcal{P}_n) < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

(10)

<u>Caso</u> que $\mathcal{P}$ é partição infinita tal que $H(\mathcal{P}) < \infty$.

$$\mathcal{P} = \{P_1, P_2 \dots P_N \quad \}$$

$$\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\mathcal{P}}_n = \{P_1, P_2 \dots \bigcup_{i \geq N} P_i\} = \{Q_1, \dots, Q_N\}$$

Af: $d(\mathcal{P}, \tilde{\mathcal{P}}_n) \to 0$ com $n \to \infty$

$$H(\tilde{\mathcal{P}} | \mathcal{P}) = 0 \quad \text{pois} \quad \mathcal{P} \geq \tilde{\mathcal{P}}$$

$$H(\mathcal{P} | \tilde{\mathcal{P}}) = -\sum_{i,j} \mu(P_i \cap Q_j) \log \left[\frac{\mu(P_i \cap Q_j)}{\mu(Q_j)}\right] =$$

quando $j = 1, \dots N-1$

$$\frac{\mu(P_i \cap Q_j)}{\mu(Q_j)} = \begin{cases} 0 & \text{ou} \\ 1 \end{cases} \quad \mu($$

~~isto implica~~

$\sum$ quando

$i = 1 \dots N-1$

$$\frac{\mu(P_i \cap Q_N)}{\mu(Q_N)} = 0$$

Desigualdade de Ruelle

$f: M \circlearrowleft$ difeo C^1, M compacta sem bordo

$x \in M$ é ponto regular de f se existem números $\lambda_0(x) > \lambda_2(x) > \dots > \lambda_m(x)$ e uma decomposição:

$$T_x M = E_1(x) \oplus \dots \oplus E_m(x)$$

tais que

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \log \| (D_x f^n) v \| = \lambda_j(x)$$

para todo $0 \neq v \in E_j(x)$ e $1 \le j \le m$.

Suponha $M \xhookrightarrow[\text{mergulhada}]{} \mathbb{R}^\ell$

$U \supset M$ viz aberta

Suponha que $\exists$ $f_0 : U \longrightarrow f_0(U) \subset U$ difeo

tq $f_0|_M = f$, $(D_x f_0)\, T_x M^\perp = (T_{f(x)} M)^\perp$

$\| (D_x f_0)|_{T_x M^\perp} \| \le 1/2 \quad \forall x \in M.$

(determinada por $\frac{1}{n}\mathbb{Z}^n$) ②

Seja $\mathcal{P}_n$, $n \geq 1$, a partição de $\mathbb{R}^\ell$ em cubos $\left(q_1/n, \left(\frac{q_1+1}{n}\right)\right) \times \dots \times \left(q_\ell/n, \left(\frac{q_\ell+1}{n}\right)\right)$

onde $q_1, q_2, \dots q_\ell$ são inteiros ≥ 0.

Seja $\mathcal{D}$ o conj. dos difeos $g: U \to g(U)$ tais que $g(M) \subset M$, $g|_M$ preserva μ

e $(D_x g)(T_x M)^\perp = T_{g(x)} TM^\perp$ e

$$\| D_x g |_{(T_x M)^\perp} \| \leq 1/2 \quad \forall x \in M.$$

Assumi que o mergulho M em $\mathbb{R}^\ell$ é tal que

1) $\mu(M \cap \partial P) = 0$, $\forall P \in \mathcal{P}_n, n \geq 1$.

2) $U \supset Q_0 = \underbrace{[-1,1] \times \dots \times [-1,1]}_{\ell \text{ vezes}}$

$$\Rightarrow \quad \mu(P_i \cap Q_i) = \mu(Q_i)$$

com $\quad P_i \cap Q_i \subset Q_i$

$$\Rightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{r} P_i \cap Q_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{r} Q_i\right) = 1$$

com $\quad \bigcup_{i=0}^{r} (P_i \cap Q_i) \subset \bigcup_{i=1}^{r} Q_i$

$$\Rightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{i \neq j} (P_i \cap Q_j)\right) \cong 0$$

Logo se $i \neq j$

$$\frac{\mu(P_i \cap Q_j)}{\mu(Q_j)} \cong 0.$$

Teorema.- Sejam $\mathcal{P}_1 \leq \mathcal{P}_2 \leq \ldots$ partições de X e $\mathcal{P}$ uma partição tq. $H(\mathcal{P}) < \infty$. Então $\mathcal{P} \subset \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$ mod 0

$$\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} H(\mathcal{P}/\mathcal{P}_n) = 0$$

Prova $\boxed{\Rightarrow}$

Caso quando $\mathcal{P}$ é partição finita:

$\mathcal{P} = \{P_1, P_2 \dots P_r\}$

Pelo Teorema de Aprox., dado $\delta > 0$

$\exists N$ tq para $i = 1, \dots, r$ $\tilde{Q}_i \in \mathcal{P}_N$

(união de átomos) e

$$\sum_{i=1}^{r} \mu(\tilde{Q}_i \Delta P_i) < \delta$$

$\Rightarrow \forall n \geq N, \quad \tilde{Q}_i \in \mathcal{P}_n.$

Af 1 Se δ é suf. pequeno

$$\mu\Big(\bigcup_{i \neq j} \tilde{Q}_i \cap \tilde{Q}_j\Big) \leq 2\delta \simeq 0$$

de fato,

$\tilde{Q}_i \subset P_i \cup (\tilde{Q}_i \Delta P_i)$

$\tilde{Q}_j \subset P_j \cup (\tilde{Q}_j \Delta P_j)$

Assim $\tilde{Q}_i \cap \tilde{Q}_j \subset (P_i \cup (\tilde{Q}_i \Delta P_i)) \cap (P_j \cup (\tilde{Q}_j \Delta P_j))$

$\subset (\tilde{Q}_i \Delta P_i) \cup (\tilde{Q}_j \Delta P_j)$

$\Rightarrow$ Af 1

Seja

$$Q_1 = \tilde{Q}_1$$

$$Q_2 = \tilde{Q}_2 \setminus \tilde{Q}_1$$

$$\vdots$$

$$Q_{r-1} = \tilde{Q}_{r-1} \setminus \bigcup_{j=1}^{r-2} \tilde{Q}_j$$

$$Q_r = X \setminus \bigcup_{j=1}^{r-1} \tilde{Q}_j$$

~~Pela A.1~~ ~~$\mu(Q_{r-1}) = \mu(Q$~~

$i = 1, \dots, r-1$

$$Q_i \setminus P_i = \left(\tilde{Q}_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \tilde{Q}_j \right) \setminus P_i$$

$$\subset \tilde{Q}_i \setminus P_i$$

$$P_i \setminus Q_i = P_i \setminus \left(\tilde{Q}_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \tilde{Q}_j \right)$$

$$= P_i \setminus \left(\tilde{Q}_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} (\tilde{Q}_i \cap \tilde{Q}_j) \right)$$

$A \setminus (B \setminus C) =$
$A \setminus (B \cap C^c) = A \cap (B \cap C^c)^c =$
$= A \cap (B^c \cup C) =$
$= A \cap B^c \cup A \cap C$

$$= (P_i \setminus \tilde{Q}_i) \cup P_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} \tilde{Q}_i \cap \tilde{Q}_j \right)$$

$$\Rightarrow \mu(P_i \setminus Q_i) \leq \underset{\simeq 0}{\mu(P_i \setminus \tilde{Q}_i)} + \underset{\simeq 0}{\mu\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} \tilde{Q}_i \cap \tilde{Q}_j \right)}$$

$$\Rightarrow \mu(P_i \,\Delta\, Q_i) \simeq 0$$

(Análog. $X \setminus Q_r$ tem medida pequena.)

(8)

Pelo Lema

$$H(\mathcal{P}/\mathcal{Q}) \text{ é pequena.}$$

<u>Caso que</u> $\mathcal{P}$ é partição infinita com $H(\mathcal{P}) < \infty$

$$\mathcal{P} = \{P_1, P_2 \ldots P_N, \ldots\}$$

Seja $\tilde{\mathcal{P}}^{(N)} = \{P_1, P_2 \ldots P_{N-1}, \bigcup_{j \geq N} P_j\}$

é facil ver que

$$d(\mathcal{P}, \hat{\mathcal{P}}^{(N)}) \to 0 \quad \text{quando } N \to \infty$$

~~Cada $\hat{\mathcal{P}}^{(N)}$ pode ser aproxi. por $Q^{(N)} \in \bigvee_n \mathcal{P}_n$~~

Assim aprox $\mathcal{P}$ por $\hat{\mathcal{P}}^{(N)}$ tq.

$$d(\mathcal{P}, \hat{\mathcal{P}}^{(N)}) < \varepsilon/2$$

Aprox $\hat{\mathcal{P}}^{(N)}$ por $Q^{(m)} \in \mathcal{P}_m$

$$d(\tilde{\mathcal{P}}^{(N)}, Q^{(m)}) < \varepsilon/2$$

$$\forall n \geq m$$

$$\Rightarrow Q^{(m)} \in \mathcal{P}_n$$

$$\Rightarrow d(\mathcal{P}, Q^{(m)}) < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

isto é $\lim H(\mathcal{P}/\bigvee_{n \geq m} \mathcal{P}_n) = 0.$

$$= - \sum_{\substack{1 \le j \le N \\ 1 \le i \le N}} \mu(P_i \cap Q_j) \log \left[\frac{\mu(P_i \cap Q_j)}{\mu(Q_j)} \right]$$

1º termo prox de zero

$$- \sum_{\substack{1 \le j \le N \\ i \ge N+1}} \mu(P_i \cap Q_j) \log \left[\mu(P_i \cap Q_j) \right]$$

$$+ \sum_{\substack{1 \le j \le N \\ i \ge N+1}} \mu(P_i \cap Q_j) \log \mu(Q_j)$$

$$- \sum_{i \ge 1} \mu(P_i \cap Q_{N+1}) \log \mu(P_i \cap Q_{N+1})$$

$$+ \sum_{i \ge 1} \mu(P_i \cap Q_{N+1}) \log (Q_{N+1})$$

$$2^{\text{o}} \text{ termo} \le -N \left(\sum_{i \ge N+1} \mu(P_i) \log(\mu(P_i)) \right)$$