ENTROPIA

Y HOMEOMORFISMOS HIPERBÓLICOS

*

Jessica Gavia Zurita

Roxana Lopez Cruz

- IMPA, Noviembre, 1991 -

* Trabajo presentado durante el ciclo de seminarios realizados en el curso de Teoría Ergódica (Nivel Doctorado) dictado por el Dr. Carlos Gutierrez en el Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro Brasil.

RESUMEN

El propósito del desarrollo de este trabajo es el de probar que un difeomorfismo de Anosov transitivo es intrínsicamente ergódico y algunas de las propiedades de su medida intrínseca.

Se desarrolla una teoría sobre una clase mas amplia de homeomorfismos llamados los homeomorfismos hiperbólicos de los cuales un difeomorfismo de Anosov es un caso especial.

En primer lugar, se muestra en el teorema [2] que un homeomorfismo hiperbólico transitivo es equivalente a un subshift de tipo finito determinado por una partición de Markov.

Por último, se prueba el Teorema de Bowen - Sinai que dice:

" Todo homeomorfismo f hiperbólico y topológicamente mixing es intrínsecamente ergódico y además su entropia topológica es:

$$h_{top}(f) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \# \mathit{Fix}\,(f^n) \text{ "}$$

HOMEOMORFISMOS HIPERBÓLICOS

Definición 1. Sea X un espacio métrico y $f:X \longrightarrow X$ un homeomorfismo. Definimos:

(i) **Conjunto ε - estable de un punto $x \in X$,**

$$W^s_\varepsilon(x) = \{\ y \in X \ /\ d(f^n(y),f^n(x)) < \varepsilon \quad \forall\ n \geq 0\ \}.$$

(ii) Conjunto ε - inestable de un punto $x \in X$,

$$W^u_\varepsilon(x) = \{\ y \in X \ /\ d(f^n(y),f^n(x)) < \varepsilon \quad \forall\ n \leq 0\ \}.$$

Definición 2. f es un <u>homeomorfismo hiperbólico</u> de X si existen $\varepsilon_0 > 0$, $K > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que:

(a) $d(f^n(x),f^n(y)) \leq K\lambda^n \quad \forall\ x \in X,\ y \in W^s_\varepsilon(x)$ y $n \geq 0$.

~~(b)~~ $\cancel{d(f^{-n}(x),f^{-n}(y)) \leq K\lambda^n \quad \forall\ x \in X,\ y \in W^u_\varepsilon(x) \text{ y } n \geq 0.}$

(c) $\exists\ \delta > 0 \ /\ \#\ W^s_{\varepsilon_0}(x) \cap W^u_{\varepsilon_0}(y) = 1$ s.q. $d(x,y) < \delta$.

Ejemplo I (Automorfismos Hiperbólicos del Toro)

Sea $f:\ T^n \longrightarrow T^n$,

Def. f es un <u>automorfismo hiperbólico</u> cuando $Esp(f) \cap S^1 = \phi$,

Def. El levantamiento de f es $\hat{f}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ / es conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
{[z] \in T^n} \arrow[r, "f"] & T^n \\
z \in \mathbb{R}^n \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "\hat{f}"] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "\pi"]
\end{tikzcd}$$

y $\hat{f} = \pi^{-1} \circ f \circ \pi$ es un isomorfismo local y π es un difeomorfismo local.

<u>Consecuencias</u>

Como $\hat{f}$ es un isomorfismo lineal hiperbólico $(Esp(\hat{f}) \cap S^1 = \phi)$

$\Rightarrow \exists$ descomposición $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ / $D\hat{f}(E^s) = E^s$, $D\hat{f}(E^u) = E^u$ (1)

y $\mathrm{Esp}(\hat{f}|_{E^s}) \subset (S^1)^0$ y $\mathrm{Esp}(\hat{f}|_{E^u}) \subset (S^1)^0$ (2)

Def.

$$E^s_\varepsilon = \{ y \in E^s \ / \ ||\hat{f}^n(y)|| \le \varepsilon \quad \forall\, n \ge 0 \}.$$

$$E^u_\varepsilon = \{ y \in E^u \ / \ ||\hat{f}^n(y)|| \le \varepsilon \quad \forall\, n \le 0 \}.$$

Afirmación 1

E^s_ε es una vecindad del 0 en E^s.

E^u_ε es una vecindad del 0 en E^u.

Prueba

$$E^s_\varepsilon = \bigcap_{n\ge 0} \hat{f}^{-n}(B_\varepsilon(0)) \qquad E^u_\varepsilon = \bigcap_{n\le 0} \hat{f}^{-n}(B_\varepsilon(0)). \quad \blacksquare$$

Afirmación 2 [4, pag 166-172]

Para ε pequeño vale: $W^s_\varepsilon(x) = \Pi(p+E^s_\varepsilon)$

$W^u_\varepsilon(x) = \Pi(p+E^u_\varepsilon)$ (3)

donde $\Pi(p) = x$. $\blacksquare$

Afirmación

f es un difeomorfismo hiperbólico.

Prueba

Sea ε dado en la afirmación 2, probaremos: $\exists\ \varepsilon_0 > 0$, $K > 0$, $0 < \lambda < 1$ tal que:

(a) $d(f^n(x),f^n(y)) < K\lambda^n \quad \forall\ x \in T^n, y \in W^s_\varepsilon(x),\ n \ge 0.$

(b) $d(f^n(x),f^n(y)) < K\lambda^{-n} \quad \forall\ x \in T^n,\ y \in W^u_\varepsilon(x),\ n \le 0.$

(c) $\exists\ \delta > 0$ / $\#\ W^s_{\varepsilon_0}(x)\cap W^u_{\varepsilon_0}(y) = 1$ s.q. $d(x,y) < \delta$.

(a) y (b) se obtienen de (2).

(c) es consecuencia de las afirmaciones (1) y (2).

$\blacksquare$

Ejemplo II. (Subshifts de Tipo Finito)

Sea Λ un subshift de tipo finito,

$$\Lambda = \{ \theta = (\theta(i))_{i\in\mathbb{Z}} \ / \ a_{\theta(i)\theta(i+1)} = 1 \}$$

donde $A = [a_{ij}]_{nxn}$, $a_{ij} = 0$ ó 1.

Dotamos a Λ de la siguiente métrica:

$$d(\theta,\alpha) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{4^{|m|}} d_0(\theta(m),\alpha(m))$$

donde $\theta,\alpha \in \Lambda$ y $d_0(\theta(m),\alpha(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha(m) = \theta(m). \\ 1 & \text{si } \alpha(m) \neq \theta(m). \end{cases}$

<u>Afirmación 1</u>

Si $\varepsilon_0 = 2/3$ se cumple:

$$d(\alpha,\beta) < \varepsilon_0 \iff \alpha(0) = \beta(0).$$

<u>Prueba</u>

($\Rightarrow$) Si $\alpha(0) \neq \beta(0)$, $d_0(\alpha(0),\beta(0)) = 1$. Luego $d(\alpha,\beta) > 1$ y por lo tanto $1 < 2/3$. ($\Rightarrow\Leftarrow$).

($\Leftarrow$) $\alpha(0) = \beta(0) \Rightarrow d(\alpha,\beta) = 2 \sum_{m\in\mathbb{Z}^+} \frac{1}{4^{|m|}} d_0(\alpha(m),\beta(m)) < 2 \sum_{m\in\mathbb{Z}^+} \frac{1}{4^{|m|}} =$

2/3.■

<u>Afirmación 2</u>

(i) $W^s_{\varepsilon_0}(\theta) = \{ \alpha \ / \ \alpha(n) = \theta(n),\ n \geq 0 \}$.

(ii) $W^u_{\varepsilon_0}(\theta) = \{ \alpha \ / \ \alpha(n) = \theta(n),\ n \leq 0 \}$.

<u>Prueba</u>

(i) $\alpha \in W^s_{\varepsilon_0}(\theta) \iff d(\sigma^k(\alpha),\sigma^k(\theta)) < \varepsilon_0 \quad \forall\ k \geq 0$

$$\iff \sum_{m\in\mathbb{Z}^+} \frac{1}{4^{|m|}} d_0(\sigma^k(\alpha)(m),\sigma^k(\theta)(m)) < \varepsilon_0.$$

$$\iff d(\sigma^k(\alpha)(0),\sigma^k(\theta)(0)) = 0 \quad \forall\ k \geq 0 \text{ (af. 1)}$$

$$\sigma^k(\alpha)(0) = \alpha(k) \ \forall\ k \geq 0.$$

$$\iff d(\alpha(k),\theta(k)) = 0 \quad \forall\ k \geq 0.$$

$$\text{(ii) } \alpha \in W^u_{\varepsilon_0}(\theta) \iff d(\sigma^k(\alpha),\sigma^k(\theta)) < \varepsilon_0 \quad \forall\, k \le 0$$

$$\iff d(\sigma^k(\alpha)(0),\sigma^k(\theta)(0)) = 0 \quad \forall\, k \le 0$$

$$\iff d(\alpha(k),\theta(k)) = 0 \quad \forall\, k \le 0.$$

■

Afirmación 3

Cumple (c), i.e.,

$\exists\ \varepsilon_0 = 2/3,\ \delta > 0\ \ /\ \#\ W^s_{\varepsilon_0}(x) \cap W^u_{\varepsilon_0}(y) = 1$ s.q. $d(x,y) < \delta$.

Prueba

Tomo $\varepsilon_0 = 2/3$ y $d(x,y) \le \varepsilon_0$, $x,y \in \Lambda$.

Entonces, $x(0) = y(0)$.

Defino $z(n)$ /

$$z(n) = \begin{cases} x(n) & n \ge 0 \\ y(n) & n \le 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (z(n)) \in \Lambda$ y $z \in W^s_{\varepsilon_0}(x) \cap W^u_{\varepsilon_0}(y)$.

Af Por definición :

$$\begin{cases} z \in W^s_{\varepsilon_0}(x) \text{ pues } z(n) = x(n) & \forall\, n \ge 0. \\ z \in W^u_{\varepsilon_0}(y) \text{ pues } z(n) = y(n) & \forall\, n \le 0. \end{cases}$$

y es único: por af. 2.

Sup. $\exists\ w \in W^s_{\varepsilon_0}(x) \cap W^u_{\varepsilon_0}(y) \Rightarrow w(n) = x(n)\ \ \forall\, n \ge 0,\ w(n) = y(n)\ \ \forall\, n \le 0.$

$\Rightarrow w = z.$

Por lo tanto se verifica (c).

■

Afirmación 4

(a) $\exists\ \varepsilon_0 > 0$, $K > 0$. $0 < \lambda < 1$ / $d(\sigma^n(x),\sigma^n(y)) < K\lambda^n\ \ \forall\ x,\ y \in W^s_{\varepsilon_0}(x)$ y $n \ge 0$.

(b) $\exists\ \varepsilon_0 > 0$, $K > 0$. $0 < \lambda < 1$ / $d(\sigma^n(x),\sigma^n(y)) < K\lambda^n\ \ \forall\ x,\ y \in$

$W^u_{\varepsilon_0}(x)$ y $n \leq 0$.

Prueba

$$d(\sigma^k(x),\sigma^k(y)) = 2(1/4)^k d(x,y) \quad k \geq 0,\ x \in \Lambda,\ y \in W^s_{\varepsilon_0}(x).$$

$$\Rightarrow\ d(\sigma^k(x),\sigma^k(y)) \leq 2\varepsilon_0(1/4)^k \quad k \geq 0$$

$$d(\sigma^k(x),\sigma^k(y)) = (1/4)^{-k} d(x,y) \quad k \leq 0,\ x \in \Lambda,\ y \in W^u_{\varepsilon_0}(x)$$

$$\leq 2\varepsilon_0(1/4)^{-k}$$

$$d(\sigma^k(x),\sigma^k(y)) \leq 2\varepsilon_0(1/4)^{-k} \quad k \leq 0$$

por lo tanto, $\sigma : \Lambda \longrightarrow \Lambda$ es un homeomorfismo hiperbólico. ∎

Ejemplo III. (Conjuntos Hiperbólicos)

Def. Dado un difeomorfismo f de una variedad M, decimos que $\Lambda \subset M$ es un conjunto hiperbólico si:

(i) Λ es compacto, invariante $(f(\Lambda) = \Lambda)$

(ii) $T_xM = E^s_x \oplus E^u_y \quad \forall\ x \in \Lambda$.

(iii) $\exists\ K > 0,\ 0 < \lambda < 1\ /\ (D_xf)(E^s_x) = E^s_{f(x)}$

$$(D_xf)(E^u_x) = E^u_{f(x)}$$

$$||(D_xf^n)E^s_x|| \leq K\lambda^n$$

$$||(D_xf^{-n})E^u_x|| \leq K\lambda^n$$

$\forall\ x \in \Lambda,\ \forall\ n \geq 0$.

Si $\hat{W}^s_\varepsilon(x) = \{\ y \in M\ /\ d(f^n(x),f^n(y) < \varepsilon \quad \forall\ n \geq 0\ \}$ y

$\hat{W}^u_\varepsilon(x) = \{\ y \in M\ /\ d(f^n(x),f^n(y) < \varepsilon \quad \forall\ n \leq 0\ \}$,

denotamos a la variedad estable e inestable de $f|_\Lambda$ como:

$W^s_\varepsilon(x) = \hat{W}^s_\varepsilon(x) \cap \Lambda$

$W^u_\varepsilon(x) = \hat{W}^s_\varepsilon(x) \cap \Lambda$.

De la Teoría de Dinámica Hiperbólica tenemos los siguientes resultados:

(a) (Teorema de Variedad Estable, Inestable para Conjuntos Hiperbólicos)

Los conjuntos $\hat{W}^s_\varepsilon(x)$ y $\hat{W}^u_\varepsilon(x)$ resultan ser discos diferenciables tangentes a E^s_x, E^u_x en el punto x y que varian continuamente con x.

(b) Si δ es suficientemente pequeño $\Rightarrow W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y) = p \quad \forall\ x,y \ /\ d(x,y) < \delta$.

<u>Def</u> Λ tiene <u>estructura de producto local</u> si:

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0 \ /\ W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y) \subset \Lambda \quad \forall\ x,y \ /\ d(x,y) < \delta$.

<u>Afirmación</u> Si Λ es un conjunto hiperbólico con estructura de producto local $\Rightarrow f|_\Lambda$ es un homeomorfismo hiperbólico.

<u>Prueba</u>

(a) y (b) se deducen de la condición (iii) de la def. de conjunto hiperbólico.

(c) se deduce del resultado (b) y de la condición de producto local.■

Ejemplo IV. (Difeomorfismos de Anosov)

$f : M \longrightarrow M$ es un difeomorfismo de Anosov sobre una variedad compacta M sin borde cuando, $\exists\ K > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que:

$T_xM = E^s_x \oplus E^u_y \quad \forall\ x \in M$, y

(i) $D_xf(E^s_x) = E^s_x$ y $(D_xf)^{-1}(E^u_x) = E^u_x$.

(ii) $||D_xf^n|_{E^s_x}|| \le K\lambda^n$

$||D_xf^{-n}|_{E^u_x}|| \le K\lambda^n$.

<u>Obs</u>: Es un caso particular del ejemplo anterior; luego todo difeomorfismo de Anosov es un difeomorfismo hiperbólico.

- Sean $\varepsilon_0 > 0$, $\delta > 0$ constantes como en la definición de homeomorfismo hiperbólico.

- Sea δ_1 $(0 < \delta_1 < \text{mín}\ \{\delta,\varepsilon_0\})$ tal que $\text{diam}(f(B)) < \text{mín}\ \{1/2\delta,\varepsilon_0\}$ y $\text{diam}(f^{-1}(B)) < \text{mín}\ \{1/2\delta,\varepsilon_0\}$ siempre que $\text{diam}(B) \leq \delta_1$. Esto último debido a la continuidad uniforme.

<u>Def</u> Decimos que $R \subset X$ es un rectángulo si $\text{diam}(R) \leq \delta_1$ y :

$$W^s_{\varepsilon_0}(x) \cap W^u_{\varepsilon_0}(y) \in R.\ \forall\ x,y \in R.$$

<u>Obs</u> Como $\delta_1 < \delta \Rightarrow W^s_{\varepsilon_0}(x) \cap W^u_{\varepsilon_0}(y) = p \in R$.

<u>Def</u> Si $x \in R$, definimos: $W^s(x,R) = R \cap W^s_{\varepsilon_0}(x)$

$$W^u(x,R) = R \cap W^u_{\varepsilon_0}(x).$$

<u>Def</u> R es un rectángulo própio si $\overline{R^{\circ}} = R$.

~~<u>Def</u> Si R es un rectángulo, decimos que:~~

(a) $R_0 \subset R$ es un s-subrectángulo de X si es un rectángulo y $x \in R_0 \Rightarrow W^s(x,R_0) = W^s(x,R)$.

(b) $R_0 \subset R$ es un u-subrectángulo de X si es un rectángulo y $x \in R_0 \Rightarrow W^u(x,R_0) = W^u(x,R)$.

<u>Defs</u>

. Una partición de Markov de X es una colección $\mathcal{R} = \{R_1,\dots,R_m\}$ de rectángulos própios tales que

(a) $R_i \cap R_j \subset \partial R_i \cap \partial R_j$, $i \neq j$.

(b) $x \in R_i \cap f^{-1}(\text{int}R_j) \Rightarrow f(W^s(x,R_i)) \subset W^s(f(x),R_j)$

$x \in R_i \cap f(\text{int}R_j) \Rightarrow f^{-1}(W^u(x,R_i)) \subset W^u(f^{-1}(x),R_j)$

. Matriz de incidencia $A_{\mathcal{R}} = (a_{ij})_{m \times m}$ (asociada a $\mathcal{R}$) está definida como

$a_{ij} = 1$ si $f(R_i) \cap \text{int}R_j \neq \phi$ y cero en otro caso.

Teorema 1 (Bowen [2]) Todo homeomorfismo hiperbólico transitivo posee una partición de Markov.$\blacksquare$

Teorema 2. Sean $f\colon X \longrightarrow X$ un homeomorfismo hiperbólico y $\mathcal{R} = \{R_1,\ldots,R_m\}$ una partición de Markov y $A_{\mathcal{R}}$ su matriz de incidencia. Entonces:

. $\forall\ \theta \in B(A_{\mathcal{R}})\quad \# \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}(R_{\theta(n)}) = 1$

. La aplicación $\Pi : B(A_{\mathcal{R}}) \longrightarrow X\ ,\ \theta \mapsto \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}(R_{\theta(n)})$, es contínua y

satisface:

(I) $\Pi\circ\sigma = f\circ\Pi$

(II) Π es sobreyectiva

(III) $\forall\ \mu \in \mathcal{M}_{\sigma}(B(\mathcal{A}_R))$ ergódica y positiva sobre abiertos

tenemos $\mu\{\theta/\ \#\Pi^{-1}\Pi(\theta) > 1\} = 0$.

(IV) f topológicamente mixing $\Rightarrow$ σ tambien lo es

(V) $\#\ \Pi^{-1}(x) \leq m^2,\ \forall\ x \in X$.

<u>Demostración</u>

<u>Observación</u> Un s - subrectángulo y un u - subrectángulo de R no vacios se intersecan: sean R_0 un s-subrectángulo y R_1 un u-subrectángulo,

$x \in R_0,\ y \in R_1 \Rightarrow p \in W^s_{\varepsilon_0}(x)\cap W^u_{\varepsilon_0}(y) \in R$

$p \in W^s_{\varepsilon_0}(x)\cap R = W^s_{\varepsilon_0}(x)\cap R_0 \Rightarrow p \in R_0$

$p \in W^u_{\varepsilon_0}(x)\cap R = W^u_{\varepsilon_0}(x)\cap R_1 \Rightarrow p \in R_1$

Luego, $R_0\cap R_1 \neq \phi$. Ahora,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}(R_{\theta(n)}) = \bigcap_{n\geq 0} f^{-n}(R_{\theta(n)})\cap \bigcap_{n\leq 0} f^{-n}(R_{\theta(n)})$$

<u>Af</u> $\bigcap_{n\geq 0} f^{-n}(R_{\theta(n)})$ es s-subrectángulo no vacio de $R_{\theta(0)}$.

Basta probar que (*) $\bigcap_{n=0}^{N} f^{-n}(R_{\theta(n)})$ es s-subrectángulo no vacio, $\forall$ N.

Dem. por inducción: Suponga que (*) es válido para N = k.

$$\bigcap_{n=0}^{k+1} f^{-n}(R_{\theta(n)}) = R_{\theta(0)} \cap f^{-1}\Big(\bigcap_{n=0}^{k+1} f^{-n+1}(R_{\theta(n)})\Big)$$

$$= R_{\theta(0)} \cap f^{-1}\Big(\bigcap_{n=0}^{k} f^{-n}(R_{\theta(n+1)})\Big)$$

Resultado: S subrectángulo de $R_{\theta(n+1)} \Rightarrow R_{\theta(n)} \cap f^{-1}(S)$ es s-subrectángulo de $R_{\theta(n)}$. (Ver [1]).

Luego $\bigcap_{n=0}^{k+1} f^{-n}(R_{\theta(n+1)}))$ s-subrectángulo de $R_{\theta(0)}$.

<u>Af</u>: $\bigcap_{n=0}^{k+1} f^{-n}(R_{\theta(n)})) \neq \phi$

dem: Sean $x \in f(R_{\theta(0)}) \cap \operatorname{int} R_{\theta(1)}$ y $\varepsilon \bigcap_{n=0}^{k} f^{-n}(R_{\theta(n+1)})$.

$\cancel{x, y \in R_{\theta(1)} \Rightarrow p = W^s_{\varepsilon_0}(x) \cap W^u_{\varepsilon_0}(y)}$

$$- W^u(y, R_{\theta(1)}) = W^u\Big(y, \bigcap_{n=0}^{k} f^{-n}(R_{\theta(n+1)})\Big) \Rightarrow p \in W^u_{\varepsilon_0}(x) \cap \Big(\bigcap_{n=0}^{k} f^{-n}(R_{\theta(n+1)})\Big)$$

$$W^u_{\varepsilon_0}(x) \cap \Big(\bigcap_{n=0}^{k} f^{-n}(R_{\theta(n+1)})\Big) \subset W^u_{\varepsilon_0}(x) \cap R_{\theta(1)} = W^u(x, R_{\theta(1)})$$

$$f^{-1}\Big(W^u_{\varepsilon_0}(x) \cap \Big(\bigcap_{n=0}^{k} f^{-n}(R_{\theta(n+1)})\Big)\Big) \subset f^{-1}(W^u(x, R_{\theta(1)})) \subset W^u(f^{-1}(x), R_{\theta(0)})$$

$$\subset R_{\theta(0)}$$

Por lo tanto, $\bigcap_{n=0}^{N} f^{-n}(R_{\theta(n)}) \neq \phi$ s-subrectángulo, $\forall$ N.

Ahora veamos que $R = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(R_{\theta(n)})$ es un s-subrectángulo no vacío.

<u>dem</u> : (i) diam $R < \delta_1$

(ii) $x, y \in R \Rightarrow x, y \in \bigcap_{n=0}^{N} f^{-n}(R_{\theta(n)})$, $\forall$ N

$$\{p\} = W^s(x)\cap W^u(y) \Rightarrow p \in \bigcap_{n=0}^{N} f^{-n}(R_{\theta(n)}) \text{ , } \forall N$$

$$\Rightarrow p \in \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(R_{\theta(n)})$$

$$\text{(iii) } x \in R \Rightarrow W^s(x)\cap \bigcap_{n=0}^{N} f^{-n}(R_{\theta(n)}) = W^s(x)\cap R_{\theta(0)} \text{ , } \forall N$$

$$\Rightarrow W^s(x)\cap \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(R_{\theta(n)}) = W^s(x)\cap R_{\theta(0)}.$$

Claramente $R \neq \phi$ por ser intersección de compactos encajados.

<u>Af</u> : $\# \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(R_{\theta(n)}) = 1.$

Sup. $x,y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(R_{\theta(n)}) \Rightarrow f^n(x),\ f^n(y) \in R_{\theta(n)},\ \forall n$

$\Rightarrow d(f^n(x),f^n(y)) \leq \varepsilon_0,\ \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in W^s_{\varepsilon_0}(x)\cap W^u_{\varepsilon_0}(y) = \{y\}$

Luego, $x = y$.

(I)

(i) Prueba de $\Pi\circ\sigma = f\circ\Pi$: $\theta \in B(A_{\mathcal{R}})$,

$$\Pi\circ\sigma(\theta) = \Pi(\sigma(\theta)) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}(R_{\theta(n+1)})$$

$$= f(\bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n-1}(R_{\theta(n+1)}) = f(\Pi(\theta)).$$

(ii) Π es contínua:

Sea $\varepsilon > 0$ y N tal que diam $(\bigcap_{n=0}^{N} f^{-n}(R_{\theta(n)}) < \varepsilon$.

Sea $\delta = 1/4^N$, entonces

$$d(\theta,\alpha) < \delta \Rightarrow \theta(n) = \alpha(n),\ \forall\ |n| \leq N.$$

$$\Rightarrow \Pi(\theta) \in \bigcap_{n=0}^{N} f^{-n}(R_{\theta(n)}) = \bigcap_{n=0}^{N} f^{-n}(R_{\alpha(n)})$$

por lo tanto $d_x(\Pi(\theta),\Pi(\alpha)) < \varepsilon$.

(II) Π es sobreyectiva:

Sea $Y = \bigcup_i \text{int}R_i$; $Z = \bigcap f^{-n}(Y)$ es denso en X.

Dado $x \in Z \Rightarrow f^n(x) \in Y, \forall$ n.

Defino $\theta(n)$ tal que $f^n(x) \in \text{int}R_{\theta(n)}$

$\Rightarrow f^{n+1}(x) \in f(R_{\theta(n)}) \cap \text{int}R_{\theta(n+1)} \Rightarrow a_{\theta(n)\theta(n+1)} = 1$

Por lo tanto $\theta \in B(A_{\mathcal{R}})$ y claramente $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}(R_{\theta(n)}) = \Pi(\theta)$.

(III) $\mu \in \mathcal{M}_{\sigma}(B(\mathcal{A}_R)) \Rightarrow \mu\{\theta / \ \#\Pi^{-1}\Pi(\theta) > 1\} = 0$.

<u>Def</u>. Si R es un rectángulo definimos:

$\partial^s R = \{x \in R \ / \ W^s(x,R) \subset \partial R\}$

$\partial^u R = \{x \in R \ / \ W^u(x,R) \subset \partial R\}$

<u>Resultado</u> : $\partial R = \partial^u R \cup \partial^s R$ [ver 3].

~~dem. (III)~~

Por propiedad de partición de Markov $f(\bigcup_i \partial^s R_i) \subset \bigcup_i \partial^s R_i$ y $f^{-1}(\bigcup_i \partial^u R_i) \subset \bigcup_i \partial^u R_i$.

Sea $\theta \in \sum \Rightarrow \exists\ \theta_1$ tal que $\Pi(\theta) = \Pi(\theta_1)$ y $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta(n) \neq \theta_1(n)$.

$\Pi(\theta) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}(R_{\theta(n)})$ y $\Pi(\theta_1) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}(R_{\theta_1(n)})$

$$\Rightarrow f^n(\Pi(\theta)) \in R_{\theta(n)} \cap R_{\theta_1(n)} \subset \partial R_{\theta(n)} \cap \partial R_{\theta_1(n)}.$$

Por lo tanto $\theta \in \sigma^{-n}(\Pi^{-1}(\bigcup_i \partial R_i))$ y $\sum \subset \sigma^{-n}(\Pi^{-1}(\bigcup_i \partial R_i))$.

Bastará probar $\mu(\Pi^{-1}(\bigcup_i \partial R_i)) = 0 \Leftrightarrow \mu(\Pi^{-1}(\bigcup_i \partial^s R_i)) = 0 \wedge \mu(\Pi^{-1}(\bigcup_i \partial^u R_i)) = 0$.

$\mu(\Pi^{-1}(\bigcup_i \partial^s R_i)) = \mu(\sigma^n(\Pi^{-1}(\bigcup_i \partial^s R_i)) = \mu(\bigcap_i \sigma^n(\Pi^{-1}(\bigcup_i \partial^s R_i)) =$

$= \mu(A)$ donde $A = \Pi^{-1}(\bigcap_i f^n(\bigcup_i \partial^s R_i)$.

A es invariante y cerrado.

Si $\mu(A) = 1$ y A cerrado $\Rightarrow A = B(A_{\mathcal{R}})$ contradice la sobreyectividad de Π.

(IV) f topológicamente mixing $\Rightarrow \sigma$ tambien lo es.

Sean U, V abiertos en $B(A_{\mathcal{R}})$.

Π contínua $\Rightarrow \exists\ U_0, V_0$ abiertos en X tal que $\Pi^{-1}(U_0) \subset U$ y $\Pi^{-1}(V_0) \subset V$

(usar (I) y Π sobre entre compactos)

f top. mixing $\Rightarrow \exists$ N tal que $f^N(U_0) \cap V_0 \neq \phi$. $\forall\ n \geq N$.

$\sigma^n(U) \cap V \supset \sigma^n(\Pi^{-1}(U_0)) \cap \Pi^{-1}(V_0) = \Pi^{-1}(f^n(U_0) \cap V_0) \neq \phi$, $\forall\ n \geq N$.

<u>Lema</u> Sean $\alpha, \beta \in B(A_{\mathcal{R}})$ tales que $\Pi(\alpha) = \Pi(\beta)$.

Si existe n_0 tal que $\alpha(n_0) \neq \beta(n_0)$, entonces $\alpha(n) \neq \beta(n)$, $\forall\ n \geq n_0$ ó $\forall\ n \leq n_0$.

dem. prop. (V): $\#\Pi^{-1}(x) \leq m^2$, $\forall\ x \in X$.

Supongamos que no, i.e., $\Pi^{-1}(x) = \{\theta_1, \ldots, \theta_k\}$ $k > m^2$.

Sea N tal que $\theta_i|_{(-N,\ldots,n)} \neq \theta_j|_{(-N,\ldots,n)}$ si $i \neq j$.

<u>Af</u> : $\exists\ i \neq j$ / $\theta_i(-N) = \theta_j(-N) \wedge \theta_i(N) = \theta_j(N)$.

Supongamos dados $i \neq j$ se tiene $\theta_i(-N) \neq \theta_j(-N) \vee \theta_i(N) \neq \theta_j(N)$

$$
\begin{array}{lcl}
\theta_1(-N)\ldots\theta_k(N) & & \\
\vdots \qquad \vdots & & (\Rightarrow\Leftarrow) \text{ pues } \theta_i(N) \in \{1,\ldots,m\} \\
\theta_1(-N)\ldots\theta_k(N) & &
\end{array}
$$

usando la contrarecíproca del lema anterior tenemos

$\theta_i(n) = \theta_j(n)$, $-N \leq n \leq N$. $(\Rightarrow\Leftarrow)$

Por lo tanto $\#\Pi^{-1}(x) \leq m^2$, $\forall\ x \in X$.

■

Teorema (Bowen - Sinai)

Sea $f\colon X \longrightarrow X$ un homeomorfismo hiperbólico, topológicamente mixing, entonces f es intrínsecamente ergódico y su entropía vale:

$$h_{top}(f) = \lim_{n} \frac{1}{n} \log \# \operatorname{Fix}(f^n)$$

<u>dem</u>:

<u>Resultado</u> : Si $\sigma : B(A) \longrightarrow B(A)$ es topológicamente mixing entonces existe una única medida $\upsilon_0 \in M_\sigma(B(A))$ tal que:

$$h_{\upsilon_0}(\sigma) = \lim \frac{1}{n} \log \# \operatorname{Fix}(\sigma^n).$$

υ_0 es una medida de Markov positiva sobre abiertos que da entropía máxima.

Como X es compacto y f top. mixing $\Rightarrow$ f es transitivo.

Entonces $\exists\ \mathcal{R} = \{R_1,\dots,R_m\}$ partición de Markov de X.

Sea σ: $B(A_{\mathcal{R}}) \longrightarrow B(A_R)$ el subshift de tipo finito dado por el teorema 2.

Desde que f top. mixing $\Rightarrow \sigma$ top. mixing, podemos considerar la medida de Parry $\upsilon_0 \in M_\sigma(B(A_{\mathcal{R}}))$ i.e. $h_{\upsilon_0}(\sigma) \geq h_\upsilon(\sigma)$, $\forall\ \upsilon \in M_\sigma(B(A_{\mathcal{R}}))$.

Definimos $\mu_0 \in M_f(x)$ por $\mu_0(A) = \upsilon_0(\Pi^{-1}(A))$, $\forall\ A \subset X$ Boreleano.

Π es una equivalencia entre σ y f pues $\upsilon_0(\Sigma) = 0$.

Para probar que f es intrínsecamente ergódica, tomemos $\mu \in M_f(x)$ tal que $h_\upsilon(f) \geq h_{\mu_0}(f)$.

<u>Af. 1</u> : Existe $\upsilon \in M_\sigma(B(A_{\mathcal{R}}))$ tal que $\upsilon(\Pi^{-1}(A)) = \mu_0(A)$, $\forall\ A \subset X$ Boreleano.

idea de la prueba: Sea $E = \{\varphi \in C^0(B(A_{\mathcal{R}})) \ /\ \exists\ \psi \in C^0(X) \text{ t.q. } \psi\circ\Pi = \varphi\}$

Como Π es sobreyectiva entonces ψ es única, luego puedo definir

L: $E \longrightarrow \mathbb{R}$ como $L(\varphi) = \int_X \psi d\mu$ que es un funcional lineal positivo sobre el espacio cerrado E.

Sea $\hat{L} : C^0(B(A_{\mathcal{R}})) \longrightarrow \mathbb{R}$ su extensión lineal positiva, entonces existe $\upsilon \in M_\sigma(B(A_{\mathcal{R}}))$ tal que $\hat{L}(\varphi) = \int_{B(A_{\mathcal{R}})} \varphi d\upsilon$.

Se puede ver que $\Pi^{*}\mu = \upsilon$, pero υ puede no ser invariante, entonces defino $\upsilon_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}(\sigma^{*})^{j}\upsilon$ y tomamos una subsucesión υ_{n_j} convergente.

Sea $\hat{\upsilon} = \lim_j \upsilon_{n_j}$. Es fácil verificar que $\sigma^{*}\hat{\upsilon} = \hat{\upsilon}$ y $\Pi^{*}\hat{\upsilon} = \mu$.

<u>Af. 2</u> : $h_u(\sigma) \geq h_\mu(f)$

En efecto, sea $\mathcal{P}$ partición de X, entonces $\Pi^{-1}\mathcal{P}$ es partición de $B(A_{\mathcal{R}})$.

$$h_\mu(f,\mathcal{P}) = \lim \frac{1}{n} H(\mathcal{P}\vee\ldots\vee f^{-(n+1)}\mathcal{P}) = \lim_n -\frac{1}{n}\sum_{P\in\mathcal{P}}\mu(P)\log\mu(P)$$

como $\mu(P) = \upsilon(\Pi^{-1}P$, entonces:

$$h_\mu(f,\mathcal{P}) = \lim \frac{1}{n} H(\Pi^{-1}\mathcal{P}\vee\ldots\vee\sigma^{-(n+1)}\Pi^{-1}\mathcal{P}) = h_\upsilon(\sigma,\Pi^{-1}\mathcal{P}) \leq h_\upsilon(\sigma)$$

por lo tanto, $h_\mu(f) \leq h_\upsilon(\sigma)$.

Tenemos $h_\upsilon(\sigma) \geq h_\mu(f) \geq h_{\mu_0}(f) = h_{\upsilon_0}(\sigma) \Rightarrow \upsilon = \upsilon_0$

por lo tanto $\mu = \mu_0$.

Ahora provaremos que $h_{\mu_0}(f) = \lim_n \frac{1}{n}\log \# \mathrm{Fix}(f^n)$.

Por el Teor. de Parry $h_{\upsilon_0}(\sigma) = \lim_n \frac{1}{n}\log \# \mathrm{Fix}(\sigma^n) = h_{\mu_0}(f)$.

Observe que $\theta \in B(A_{\mathcal{R}})$ punto fijo de $\sigma^n \Rightarrow \Pi(\theta)$ punto fijo de f^n.

luego $\frac{1}{m^2}\# \mathrm{Fix}(\sigma^n) \leq \# \mathrm{Fix}(f^n) \Rightarrow$

$$\frac{1}{n}\log \# \mathrm{Fix}(\sigma^n) \leq \frac{\log m^2}{n} + \frac{1}{n}\log \# \mathrm{Fix}(f^n)$$

por lo tanto, $\lim_n \frac{1}{n}\log \# \mathrm{Fix}(\sigma^n) \leq \lim_n \frac{1}{n}\log \# \mathrm{Fix}(f^n)$. ■

Para concluir, enunciamos algunos resultados que no demostraremos los cuales junto con la teoría ya desarrollada nos conducen al objetivo central de este trabajo.

Teorema 3.([5]) Si $f: X \longrightarrow X$ es un homeomorfismo hiperbólico transitivo, existe una descomposición de X en compactos disjuntos invariantes $X = X_1 \cup \ldots \cup X_l$ tales que:

$$f(X_i) = X_{i+1} \qquad i = 1,\ldots,l-1.$$

$$f(X_l) = X_1$$

y $f^l|_{X_i}$ es topológicamente mixing para todo $1 \leq i \leq l$. ∎

Teorema 4. ([6]) Si Λ es un conjunto hiperbólico con estructura de producto local de un difeomorfismo f y $\overline{\mathcal{P}er(f|_\Lambda)} = \Lambda$, existe una descomposición de Λ en conjuntos compactos invariantes disjuntos $\Lambda = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_k$ tales que $f|_{\Lambda_i}$ es transitivo para todo $1 \leq i \leq k$. ∎

Corolario 1. Un difeomorfismo de Anosov transitivo de una variedad conexa es topológicamente mixing.

<u>dem</u>

Como una variedad conexa no puede ser descompuesta en compactos disjuntos, entonces del teorema 3 concluimos que todo difeomorfismo de Anosov es topológicamente mixing. ∎

Corolario 2. Un difeomorfismo de Anosov transitivo de una variedad conexa es intrínsecamente ergódico.

<u>dem</u>

Aplicando corolario 1 y Teo. 2. ∎

BIBLIOGRAFIA

[1] **R. Bowen** - Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms, Lecture Notes in Mathematics 470 (1975).

[2] **R. Bowen** - Markov Partitions for Axiom A diffeomorphisms, Amer.Journal of MAth. 92 (1970), 725-747.

[3] **R. Mañe** - Teoría Ergódica, Projeto Euclides, IMPA (1983).

[4] **J. Palis Jr., W. de Melo** - Introdução aos Sistemas Dinámicos, Projeto Euclides, IMPA (1978).

[5] **R. Bowen** - Topological Entropy and Axiom A, Proc. of Symp. on Pure Math. XIV (1968), 23 - 41.

[6] **S. Smale** - Differentiable Dynamical Systems Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 97 116.

SOBRE ALGUNAS LINEAS DE INVESTIGACIÓN EN ÁLGEBRA, EN EL IMPA

Expositor: Fernnando Torres Orihuela (estudiante del IMPA).

Objetivo: Esencialmente discutir temas relacionados con la elaboración de la tesis del expositor, que se pueden encuadrar dentro de la teoría de curvas sobre campos finitos.