# Aula 2

**Proposição:** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaços de medida $\sigma$-finitos e $T: X \to Y$

$\left( X = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i \right., \left. \mu(X_i) < \infty \right)$

mensurável $\left( \forall B \in \mathcal{B},\ T^{-1}(B) \in \mathcal{A} \right)$.

Se existe uma subálgebra $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ que gera $\mathcal{B}$ e tal que $\mu(T^{-1}(A)) = \nu(A)$ $\forall A \in \mathcal{B}_0$, então $T$ preserva medida.

**Prova.-** (A provar: $\mu(T^{-1}(A)) = \nu(A)$, $\forall A \in \mathcal{B}$)

Seja $\nu_0 : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{R}$ a medida definida como

$$\nu_0(A) = \mu\left(T^{-1}(A)\right)$$

~~nota~~ por hipótese $\nu_0|_{\mathcal{B}_0} = \nu$

$\nu$ é a única extensão à $\mathcal{B}$ de $\nu_0|_{\mathcal{B}_0}$ Teor. Hahn-Kolmogorov.

($\mathcal{B}_0$ gera $\mathcal{B}$)

$\Rightarrow \nu_0 = \nu$

$(K, \mathcal{B}(K), \mu)$ espaço de medida
$K =$ espaço métrico separável

$T: K \to K$ preserva medida

Então q.t.p $x \in K$

$$\liminf_{n \to \infty} d(T^n x, x) = 0.$$

Exercício: (P. Walters Pg. 20)

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaços de probabilidade e $T: X \to Y$ ~~satisf~~ satisfazendo:

Existe subalgebra $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ que gera $\mathcal{B}$ t.q. ~~$\mu(T^{-1}(A)) = \nu(A)$~~, $\forall A \in \mathcal{B}_0$

$T^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ e $\mu(T^{-1}(A)) = \nu(A)$

Então $T$ é mensurável

e $T$ preserva medida.

## Exemplo 1.-

Transformação de Gauss.

$\varphi : [0,1] \circlearrowleft$

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$$

- $\varphi$ é mensurável

$(X, \mathcal{A}, \mu)$

$(Y, \mathcal{B}, \nu)$

$([0,1], \text{borelean}, \mu)$

$A$ borelean

$$\mu(A) = \frac{1}{\log 2} \int_A \frac{1}{1+t} \, d\lambda$$

- $\varphi$ preserva $\mu$.

### 1.1 Descrição de $\varphi$

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right] \in \left(\frac{1}{n_1+1}, \frac{1}{n_1}\right]$$

$$\frac{1}{x} = \varphi(x) + \left[\frac{1}{x}\right]$$

$$x = \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right] + \varphi(x)}$$

$$\left[\frac{1}{x}\right] = n_1$$

$$x = \frac{1}{n_1 + \varphi(x)}$$

$$x = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \varphi^2(x)}}$$

$$x = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{n_j + \varphi^j(x)}}}}$$

Se escreve

$$x = \cfrac{1}{n_1(x) + \cfrac{1}{n_2(x) + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

A seq. $n_1, n_2, n_3, \ldots$ fica determinada

$$\varphi^j(x) \in \cancel{I_{n_j+1}} = \left(\frac{1}{n_j+1} ; \frac{1}{n_j}\right]$$

x irracional

$$\varphi^j(x) \in \left(\frac{1}{n_j+1} , \frac{1}{n_j}\right) = I_{n_j+1}$$

$$\forall\, j \in \mathbb{Z}^+$$

$\varphi$ é mensurável: $\mathcal{B}$ = borelianos

$\varphi$ preserva $\mu$:

Seja $\mathcal{B}_0$ = a subalgebra de $\mathcal{B}$ das uniões disjuntas de intervalos em $[0,1]$

---

* Basta provar que

$\forall$ intervalo $[a,b] \subset [0,1]$

$$\varphi^{-1}([a,b]) \in \mathcal{B}$$

$$\mu[\varphi^{-1}([a,b]) = \mu([a,b])$$

---

• Basta prove que

$\forall$ intervalo da forma $[0,b]$

• $\varphi^{-1}([0,b]) \in \mathcal{B}$

$$\mu(\varphi^{-1}([0,b])) = \mu([0,b])$$

---

$$\varphi^{-1}([0,b]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{b+n}, \frac{1}{n}\right]$$

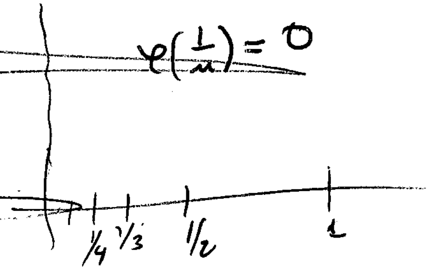
De fato $\boxed{\supseteq}$

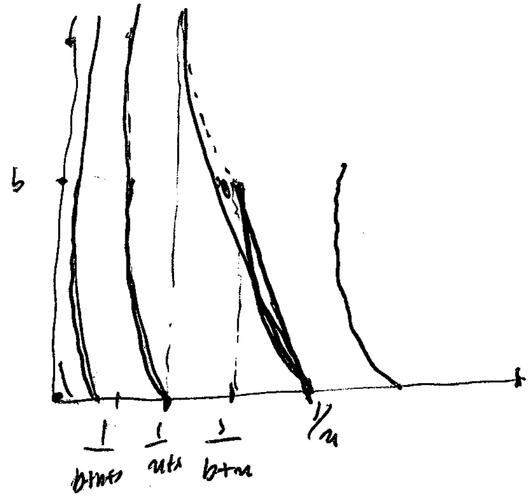
$$\varphi\left(\left[\frac{1}{b+n}, \frac{1}{n}\right]\right)$$

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

$$\varphi\left(\frac{1}{b+n}\right) = b+n-n$$

$= b$

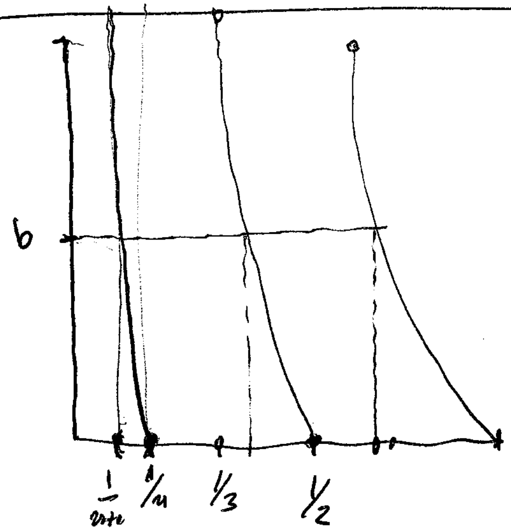





Prova $\boxed{C}$

---

graf $\varphi$




$$\varphi\left(I_{n+1}\right) = (0,1)$$

$$\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \iff n \leq \frac{1}{x} < n+1$$

$$\Updownarrow$$

$$0 < \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right] < 1 \qquad \left[\frac{1}{x}\right] = n$$

7

$\varphi$ preserva $\mu$

$$\varphi^{-1}([0,b]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{b+n}, \frac{1}{n}\right]$$

$$\mu\left(\varphi^{-1}([0,b])\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left[\frac{1}{b+n}, \frac{1}{n}\right]\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log 2} \int_{(b+n)^{-1}}^{n^{-1}} \frac{1}{1+t}\, d\lambda$$

$$= \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\log 2} \log \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{b+n}\right)}$$

$$= \frac{1}{\log 2} \sum_{1}^{\infty} \log\left(\frac{(n+1)/(b+n+1)}{n/(b+n)}\right)$$

$$= \frac{1}{\log 2} \sum_{1}^{\infty} \left[\log \frac{n+1}{b+n+1} - \log \frac{n}{b+n}\right]$$

$$= -\frac{1}{\log 2} \log \frac{1}{b+1} = \frac{1}{\log 2} \log(b+1)$$

$$= \frac{1}{\log 2} \int_0^b \frac{1}{t+1}\, d\lambda = \mu([0,b])$$

//

(7 e 1/5)

(2) $\boxed{\mu \text{ é a } \underline{\text{única}} \text{ medida invariante sob } \varphi \text{ e } \mu \ll \lambda \quad \underline{\text{ok}}}$ $\frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{1}{\log 2 (1+x)}$

↑ fato que será provado depois

(3) $x \in (0,1)$ racional

$$x = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{1}{n_k}}}}$$

$x$ irracional

$$\Delta_m(x) = x - \cfrac{1}{n_1(x) + \cfrac{1}{n_2(x) + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{n_m(x)}}}}$$

e

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \log \Delta_m(x) = -\frac{\pi^2}{6 \log 2}$$

$$e^{\log \Delta_m(x)^{\frac{1}{m}}} \simeq e^{-a}$$

$$\Delta_m(x) = e^{-am}$$

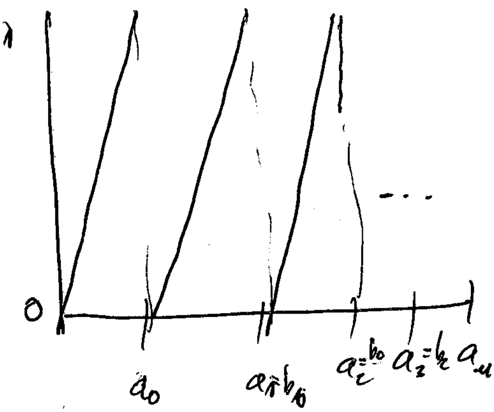
7.2

④ Para ~~todo~~ borelian

$$\lim_{n\to\infty} \lambda\left(\varphi^{-n}(A)\right) = \lambda(A)$$

---

Transformações lineares expansoras do intervalo:




$$\dot{\bigcup} (a_i, b_i) = I_{0,1}$$

$$\sum (b_j - a_j) = 1$$

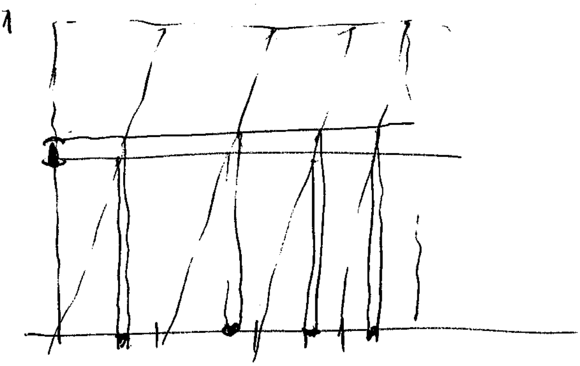
$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b_j - a_j}(x - b_j) & , x \in (a_j, b_j) \\ 0 & x \in \bigcup_{j=} (a_j, b_j) \end{cases}$$

7.B

Ex: $m > 1$ inteiro

$$\varphi_m(x) = mx - [mx]$$

$\varphi_m$ pr. medida





Teorema: $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ espaços de probabilidade. $T: X_1 \to X_2$ transf. $\mathcal{A}_2$ algebra que gera $\mathcal{B}_2$

se $\forall\, A_2 \in \mathcal{B}_2$ tem que $T^{-1}(A_2) \in \mathcal{B}_1$

e $m_1(T^{-1}(A_2)) = m_2(A_2)$ então

T preserva medida

P. Walter ~~p.20~~ [pag. 20].

Mañe [p. 32].

$n = 10$ 

Aplica ~~Teor~~ Teor de recorrên. de Poincaré a $\psi_{10}$ e conclui

~~Teor de Recorrência de Poi~~ que: $\forall$ q.t.p. $x$

$$x = 0.\underbrace{x_1 x_2 \dots x_n}_{B} \dots \underbrace{\qquad}_{B} \quad \underbrace{\qquad}_{B} \quad \underbrace{\qquad}_{B}$$

$x_1 \dots\dots x_n$

$$\psi_{10}(x) = 0.x_2 x_3 \dots x_n$$

$$\psi_{10}^2(x) = 0.x_3 x_4 \dots x_n$$

$n_j \to \infty$

$$\psi_{10}^{n_j}(x) = 0.\underbrace{x_{n_j} x_{n_j+1} \dots\dots x_{n_j+n}}_{\approx} \dots$$

está perto $0.x_1 x_2 \dots x_n$

<u>Teor. de Recorrência de Poincaré.</u> — $X$ = métrico separável

$T : X \to X$ transf. mensurável

$T^{-1}(A)$ boreliano sempre que $A$ boreliano.

$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$

$\Rightarrow$ $\mu$-q.t.p. $x \in X$ é recorrente: $\liminf d(T^n x, x) = 0$ q.t.p. $x \in X$.

Ergodicidade (Apresentação "informal")

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de probabilidade

$T: X \mapsto X$ preserva medida.

órbita de $X$ = seq. $x, T(x), \ldots, T^n(x) \ldots$

$f: X \to \mathbb{R}$ integrável

media sobre segmento de órbita:

$x, T(x), \ldots, T^n(x)$

$$\text{media} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} f(T^j(x))$$

Teor. de Birkhoff (resultado fundamental da teoria ergódica)

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} f(T^j(x))$$

existe q.t.p.

$\tilde{f}$ é a media orbital

10

$\hat{f}$ é integrável e

(5) $$\int_X \tilde{f}\, d\mu = \int_X f\, d\mu$$

<u>Caso importante:</u> $f = f_A$ função característica

$$\tilde{f}_A(x) \quad \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} f_A(T^j(x)) = \#\{0 \le j \le n-1 \mid T^j(x) \in A\}$$

$\tilde{f}_A(x)$ é o tempo medio de estadia de $x$ em $A$

"porcentagem" da orbita de $x$ que se encontra em $A$

$$\int_X \tilde{f}_A\, d\mu = \int_X f_A\, d\mu = \mu(A)$$

T é uma <u>transformação ergódica</u> se para toda função integrável $f: X \to \mathbb{R}$ vale

$$\tilde{f}(x) = \int_X f\, d\mu \qquad \text{q.t.p } x \in X$$

ou seja $\tilde{f}$ é constante q.t.p $x \in X$ Va (5)