Teorema de Mudança de variáveis

$(X, \mathcal{B}, \mu)$ espaço de medida

$(Y, \mathcal{C})$ espaço mensurável

$T : X \to Y$ mensurável

$T_* \mu = \mu \circ T^{-1} : \mathcal{C} \to [0, \infty)$

$T_* \mu(C) = \mu[T^{-1}(C)]$ Então

(i) $T_* \mu$ é medida sobre $(Y, \mathcal{C})$

(2i) $\forall$ função mensurável $f : Y \to \mathbb{R}$

$$\int_Y f \, d(T_* \mu) = \int_X f \circ T \, d\mu .$$

no sentido de que se uma integral existe a outra também existe e os valores são iguais

Prova:

① $T_* \eta$ é medida

② χ_E $\quad E \in \mathcal{C}$ função característica

$$\int_Y \chi_E \, d(T_* \eta) = \eta\left(T^{-1}(E)\right)$$

$$\int_X \chi_E \circ T \, d\eta = \int_X \chi_{T^{-1}(E)} \, d\eta = \eta\left(T^{-1}(E)\right)$$

Assim a fórmula vale para funções simples.

Se $f : Y \to [0, \infty)$ é mensurável

f é limite pontual de seq. crescente de funções simples e o resultado segue do Teor. da convergência monótona

$f = f^+ - f^-$ $\quad f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im}(f)$

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \Rightarrow$

Medidas invariantes

X = espaço métrico compacto

$M(X)$ = conjunto das probabilidades sobre os borelianos de X

$T: X \to X$ contínua

$M_T(X) = \{ \mu \in M(X) \,/\, \mu$ é T-~~invariante~~ $\}$

Aula X

Teorema: $M_T(X) \neq \emptyset$.

Passemos a prová-lo, precisamos de (Walters, p.)

1) ~~Teorema~~ de Lusin. $\forall$ borelianos B e $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ aberto U e fechado F tq $U \supset B \supset F$ e $\mu(U \setminus B) < \varepsilon$, $\mu(B \setminus F) < \varepsilon$. (regularidade de μ)

② todo $\mu \in M(X)$ é determinada pela maneira como integra funções contínuas de X em $\mathbb{R}$; i.e.: ~~Se X~~ ce μ, ν

$\mu \xrightarrow{\text{apl. injetiva}} [0,1]^{\mathbb{N}}$
$(\int f_1 d\mu, \dots \int f_n d\mu \dots$
$\|f_n\| \leq 1$

2) **Lema** Se $\mu, m \in M(X)$ e $\forall f \in C^0(X)$, $\int_X f d\mu = \int_X f dm$. Então $\underline{\mu = m}$

$C^0(X) = \{ f: X \to \mathbb{R}$ contínuas $\}$

Ob: basta para uma seq. densa $f_1 \dots f_n \dots$ de $C^0(X)$
$C^0(X)$ é separável pois X = métrico compacto

Dem. do Lema: Pelo teor. de Lusin, basta provar que $\forall\, C \subset X$ fechado

$$m(C) = \mu(C).$$

Seja C fechado e $\varepsilon > 0$. Pela regularidade de m $\exists$ um conj. aberto $U \supset C$ com $\mu(U \setminus C) < \varepsilon$.

Seja $f : X \xrightarrow{C^0} [0,1]$ tq

$$f(F) = 1 \quad e \quad f(X \setminus U) = 0$$

Então

$$\mu(C) \leq \int_X f\, d\mu \overset{\text{hip.}}{=} \int_X f\, dm \leq m(U) < m(C) + \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0$.

$\Rightarrow$ $\mu(C) \leq m(C)$. Simetricamente $m(C) \leq \mu(C)$ //

Medidas invariantes

X = espaço métrico compacto

$M(X)$ = conj. das probabilidades sobre os borelianos de X

$T: X \to X$ contínua

$M_T(X) = \{\mu \in M(X) \,/\, \mu$ é T-invariante$\}$

<u>Teorema:</u> $M_T(X) \neq \emptyset$

Para prová-lo precisamos de

(1) <u>Teorema de Lusin</u>: Seja X = espaço métrico separável. Toda medida de probabilidade sobre os borelianos de X é regular:

Ou seja, $\forall$ boreliano B e $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists$ aberto U e Fechado F tais que

$\varepsilon > 0$

$$\begin{cases} U \supset B \supset F \\ \mu(U \setminus F) < \varepsilon. \end{cases} \Rightarrow \mu(B \setminus F) < \varepsilon$$

O sgte lema diz que toda medida é determinada pela forma como ela integra as funções contínuas de X em $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) (2)

<u>Lema</u>: Sejam $\mu, m \in M(X)$ e

$$\forall f \in C^0(X) \quad , \quad \int_X f \, d\mu = \int_X f \, dm .$$

Então $\mu = m$.

$$C^0(X) = \{ f : X \to \mathbb{R} \text{ (} \dashrightarrow \mathbb{C} \text{) cont} \}$$

<u>Observação</u>. Se X é compacto $C^0(X)$ é separável. Se $\{f_1 \dots f_i \dots\}$ é denso em $C^0(X)$ e

$$\int_X f_i \, d\mu = \int_X f_i \, dm \qquad \forall i = 1, 2, \dots$$

$\Rightarrow \mu = m$.

Teorema de Representação de Riesz

X = espaço métrico compacto

$C(X)$ = espaço de Banach das $f: X \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$

com $\|f\|_0 = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$.

$J: C(X) \mapsto \mathbb{R}$ ~~O~~ operador linear contínuo positivo ($f \geq 0 \Rightarrow J(f) \geq 0$)

$J(1) = 1$

Então $\exists!\ \mu \in M(X)$ tq

$$J(f) = \int_X f d\mu \qquad \forall f \in C^0(X)$$

$|J(f)| \leq |f|$

$\|J\| = \sup\{|J(f)| \,/\, f \in C(X),\ |f| \leq 1\} \leq 1$

Como $J(1) = 1 \Rightarrow \|J\| = 1$

Há uma bijeção

$$\begin{aligned} M(X) &\longrightarrow \mathbb{P} \subset \bar{B}(0,1) \subset C^0(X)^{*} \ (\text{dual}) \\ \mu &\longrightarrow J_\mu \end{aligned}$$

$\mathbb{P} = \{\phi \in C^0(X)^* : \phi \text{ positivo},\ \phi(1) = 1$

$J_\mu(f) = \int f d\mu$

$J_{p\mu + (1-p)m} = p J_\mu + (1-p) J_m \qquad p \in [0,1],\ m, \mu \in M(X)$

(A bijeção ψ é afim.)

$M(X)$ identifica-se com um subconjunto convexo da bola unitária de $C^0(X)^*$

Def: A topologia fraca em $M(X)$ é a menor topologia (top. menos fina) ~~anti-fraca~~ (menos fina das topologias) que torna as aplicações

$$\mu \longrightarrow \int f \, d\mu \quad , \mu \in M(X)$$

contínuas, para cada $f \in C^0(X)$.

Uma base é dada pela coleção

$$V_\mu(f_1, \dots, f_k ; \varepsilon) = \{ m \in M(X) / \left| \int f_i \, dm - \int f_i \, d\mu \right| < \varepsilon, \; i = 1, \dots k \}$$

onde $\mu \in M(X)$, $k \geq 1$, $f_i \in C(X)$

$\varepsilon > 0$.

Esta topologia independe da métrica em X e com ela (como veremos) $M(X)$ é espaço métrico, compacto

~~Lema~~ X = espaço métrico compacto

$M(X)$ é metrizável na topologia fraca

$\exists$ conjunto enumerável $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$

denso ~~na~~ bola unitária $\overline{B(0,1)} = \{f \in C^0(X)$
$\|f\| \leq 1\}$.

~~Defina~~ Pelo Teor. de Riesz.

Cada $\mu \in M(X) \Leftrightarrow J_\mu : C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$

O que podemos fazer é identificar

$\mu \rightsquigarrow \left(\int f_0 d\mu, \int f_2 d\mu, \dots \right) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$

métrica

e defina

$$d(\mu, \nu) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left| \int f_j d\mu - \int f_j d\nu \right|$$

~~Então é claro que~~

$$\cancel{B_d(\mu, \varepsilon) \subset \bigcap_{j \in \mathbb{N}} V_\mu(f_1, \dots, f_j, 2\varepsilon) \subset B_d(\mu, 2\varepsilon)}$$

é fácil ver que d é uma métrica (6)

$d: M(X) \times M(X) \longmapsto \mathbb{R}$

$(M(X), d)$ neste espaço a aplicação

$\mu \longrightarrow \int f_i \, d\mu$ é contínua

$m \longrightarrow \int f_i \cdot dm$

$\left| \int f_i d\mu - \int f_i dm \right| \leq 2^i d(m, \mu)$

$\Rightarrow$ para cada $f \in C^0(X)$ ($\|f_i\| \leq 1$ ou não)

$\mu \longrightarrow \int f d\mu$ é contínua.

em $(M(X), d) \Rightarrow$ cada conj. aberto na topologia fraca é aberto em $(M(X), d)$

Recíprocamente Cada bolla $B_d(\mu, \varepsilon)$?

um conj. da forma $V_\mu(g_1, \dots, g_k; \delta)$

$k \geq 1$, $g_i \in C(X)$ $1 \leq i \leq k$ e $\delta > 0$.

Se $\mu \in M(X)$, $\varepsilon > 0$ estão dados

escolhemos: N, δ de modo que

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \delta = \frac{\varepsilon}{2} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i} \right)^{-1}$$

⑦

Af: $V_\mu(f_1, \dots, f_N; \delta) \subset \{m \in M(X) \mid d[m, \mu] < \varepsilon\}$

$m \in V_\mu(f_1 \dots f_N; \delta) \Rightarrow$

$\left| \int f_i \, dm - \int f_i \, d\mu \right| < \delta \qquad i = 1, \dots N$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \left| f_i \, dm - f_i \, d\mu \right| = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i} \left| f_i \, dm - f_i \, d\mu \right|$$

$$+ \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \left| f_i \, dm - f_i \, d\mu \right|$$

$$< \delta \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i} \right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad //$$

Obs: $\mu_n \to \mu$ na top. fraca $\Leftrightarrow$

$\forall f \in C^0(X) \qquad \int f \, d\mu_n \to \int f \, d\mu \Leftrightarrow$

$\int f_i \, d\mu_n \to \int f_i \, d\mu$

f_i dens em $\bar{B}(0,1)$

$\boxed{\Rightarrow}$

top. fraca

é a top mais fraca que faz que é

$\mu \to \int f \, d\mu$ é contínua

Assim se $\mu_n \to \mu \Rightarrow \int f \, d\mu_n \to \int f \, d\mu$

$\boxed{\mathcal{F}}$ $f_1 \dots f_n$ dem

$\int f_i \, d\mu_n \to \int f_i \, d\mu$

quer dizer $\mu_n \to \mu$.

Obs. 2 O mergulho $X \to M(X)$
$x \to \delta_x$

$\delta_x : \begin{cases} 1 & \text{em } \{x\} \\ 0 & \text{em qualquer outro borelian:} \end{cases}$

é contínuo:

$\delta_x \to \left(\int f_1 \, d\delta_x, \dots \right)$ $f_1(x) \dots f_n(x)$

$\delta_x - \delta_y$

$\delta_y \to \left(\int \dots \right)$ $f_1(y) \dots f_n(y)$

(em particular $M(X) \neq \emptyset$)

Proposição

Se $\mu_n, \mu \in M(X)$, $n \geq 1$. As seguintes afirmações são equivalentes

Prova?

(i) $\mu_n \to \mu$ na top. fraca

(ii) $\forall$ fechado F de X, $\limsup_{n \to \infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$

(iii) $\forall$ aberto U de X $\liminf_{n \to \infty} \mu_n(U) \geq \mu(U)$

(iv) $\forall A \in$ borelian com $\mu(\partial(A)) = 0$
$\mu_n(A) \mapsto \mu(A)$ //

~~Prova do Teorema~~ Prova que $M(X)$ é compacto

Como $M(X)$ é metrizável, basta provar que toda seq. $\{\mu_n\}$ em $M(X)$ possui subseq. convergente.

Seja $\{f_i\}$ seq. densa na bola unitária $C^0(X)$. $\|f_i\| \leq 1$

Consideremos a seq.

$$\int f_1 \, d\mu_n = a_n$$

$\{a_n\}$ é seq. limitada por $\|f_1\|_0 \leq 1$ logo tem subseq. convergente $\{a_n^{(1)}\}$. correspondente a $\mu_n^{(1)}$. Considere

$$\int f_2 \, d\mu_n^{(1)} = b_n$$

Analogamente $\{|b_n|\}$ é limitada e ~~tem~~ por 1 tem subseq. convergente $\{b_n^{(2)}\}$ correspondente a $\mu_n^{(2)}$ ou seja

$$\left.\begin{array}{l} \int f_1 \, d\mu_n^{(2)} \\ \int f_2 \, d\mu_n^{(2)} \end{array}\right\} \text{convergem}$$

Analogamente para $i \geq 2$ obtem-se (10)

$$\{\mu_n\} \supset \{\mu_n^{(1)}\} \supset \{\mu_n^{(2)}\} \supset \dots \supset \{\mu_n^{(i-1)}\} \supset \{\mu_n^{(i)}\} \supset \dots$$

tq $\int f_j \, d\mu_n^{(i)}$ $1 \leq j \leq i$. converge.

Considere a seq. diagonal $\mu_n^{(n)}$

Então $\forall j$ $\int f_j \, d\mu_n^{(n)}$ converge, qdo $n \to \infty$.

~~Seja $J: C^0(X) \to \mathbb{R}$~~

$J_n($

Por aproximação $\forall f \in C^0(X)$ ($\|f\| \leq 1$ ou não)

$\int f \, d\mu_n^{(n)}$ converge com $n \to \infty$

seja $J: C^0(X) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f \longrightarrow \lim_n \int f \, d\mu_n^{(n)}$

J é linear ② contínuo ($\|J(f)\| \leq \|f\|_0$),

③ $J(1) = 1$, ④ positivo ($J(f) \geq 0$ se $f \geq 0$)

(normalizado

Então Pelo Teor. de Riesz $\exists$ $\mu \in M(X)$

tq: $J(f) = \int f d\mu$ $\forall$ $f \in C^0(X)$

isto é

$$\int f d\mu_n^{(n)} \to \int f d\mu \qquad \forall f \in C^0(X)$$

Lema Prévio $\Rightarrow$ $\mu_n^{(n)} \to \mu$ na top. fraca.

Teorema: $M_T(X) \neq \emptyset$

X = esp. métrico compacto

$M(X)$ = prob. sobre borelianos

$T: X \to X$ contínua.

$M_T(X) = \{\mu \in M(X) / \mu$ é invariante$\}$

Prova: Seja $\mu \in M(X)$ $(\neq \emptyset)$ $\quad M \hookrightarrow M(X)$, $x \longrightarrow \delta_x$

$$T_* \mu = \mu \circ T^{-1}$$

~~Se~~ Se $T_* \mu = \mu \circ T^{-1} = \mu$ ok (A prova $T_* m = m$ para algum m)

Seja

$$\mu_n = \frac{1}{n}\left(\mu + T_* \mu + \dots + T_*^n \mu\right)$$

como $M(X)$ é compacto, há subseq. $\{\mu_{n_k}\}$ convergente para $m \in M(X)$

T_* ~~[illegible]~~ pouvons $\Rightarrow$

12

$$T_* \mu_{n_k} = \frac{1}{n_k}\left(T_*\mu + \dots + T_*^{n_k+1}\mu\right)$$

$$= \frac{1}{n_k}\left(\mu + T_*\mu + \dots + T_*^{n_k}\mu\right)$$

$$- \frac{1}{n_k}\mu + \frac{1}{n_k}T_*^{n_k+1}\mu$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$0$$

$\frac{1}{n_k}\mu \to 0$ pois $\mu \in M(X)$ probabilidade

$\frac{1}{n_k}T_*^{n_k+1}\mu \to 0$ " $T_*^{n_k+1}\mu \in M(X)$ " dadas:

$$\frac{1}{n_k}\left(\mu + T_*\mu + \dots + T_*^{n_k}\mu\right) \to m$$

Logo (estamos num espaço onde $M(X)$

$$\boxed{T_* \mu_{n_k} \to m}$$

$T_*\mu_{n_k} \to m$

$\mu_{n_k} \to m$ "

$T^*\mu_k \to T^*m$

Por outro lado

$$\int f\, d(T_*\mu_{n_k}) = \int f\circ T\, d\mu_{n_k} \to \int (f\circ T)\, dm$$

$$= \int f\, d(T_* m)$$

$(f\circ T \in C^0(X)$ C^0

$(\ f_A \circ T = f_{T^{-1}(A)}$ etc.... $)$

$\int f_A\circ T\, d\mu = \int f_A\, d(T_*\mu)$ pois T é contínua!

$$\int f_A \, d(T_* \nu) = m(T^{-1}(A))$$

$$\int f_A \circ T \, d\nu = \int f_{T^{-1}(A)} \, dm = m(T^{-1}(A))$$

X = espaço métrico compacto e T contínua

$$\sum \lambda_i f_{A_i} \to f \Rightarrow \sum \lambda_i f_{A_i} \circ T \to f \circ T$$

$$\| $$

$$\sum \lambda_i f_{T^{-1}(A_i)} \to f \circ T$$

Porque T é contínua e

$\mu_{n_k} \to \mu$ na top. fraca.

$$\int f\, d(T_* \mu_{n_k}) \longrightarrow \int \cancel{f\, d(T_* \mu)}$$

$$\int f\, dm$$

pois $T_* \mu_{n_k} \longrightarrow dm$

Logo $\forall f \in C^0(X)$

$$\int f\, dm = \int (f \circ T)\, dm$$

$$= \int f\, d(T_* m)$$

$\Rightarrow m = T_* m$

Teorema:

$T : X \to X$ cont. em $X =$ esp. metr. compacto

i) $M_T(X) \neq \emptyset$

ii) $M_T(X)$ é convexo

iii) $M_T(X)$ é compacto de $M(X)$
(na top. fraca)

iv) $\mu \in M_T(X) \Leftrightarrow \forall f \in C^0(X)$

$$\int f \circ T \, d\mu = \int f \, d\mu$$

Prova

i) ✓

ii) trivial

iii) Basta provar que $M_T(X)$ é fechado

Seja $\{\mu_n\}$ seq. em $M_T(X)$

μ_{n_k} subseq. convergente (em $M(X)$) de $\{\mu_n\}$

Então $\forall f \in C^0(X)$, como T é contínua

$$\int f \, d(T_* \mu) = \int (f \circ T) d\mu = \lim \int f \circ T \, d\mu_{n_k}$$

$$= \lim \int f \, d\mu_{n_k}$$

$$= \int f \, d\mu$$

$\Rightarrow$ ~~de~~ $T_* \mu = \mu$

iv) <u>exercício</u>: