Aula #10

Corolário 1. Se T é invertível, (1)

$m(X) = 1$ (T^{-1} é mensurável)

vale que $\tilde{f}(x) = \hat{f}(x)$ q.t.p.

onde $\hat{f}$ é a média orbital de f com respeito a T^{-1}

Prova:

Obs 1 f é T inv. q.t.p. ($f \circ T = f$ qtp)

$\Rightarrow \tilde{f} = f$

$\frac{1}{n}\left(f + f\circ T + \ldots + f\circ T^{n-1}\right) \overset{q.t.p.}{=} \frac{1}{n}(f + f + \ldots + f) \overset{qtp.}{=} f$ qtp.

Obs. 2 $\|\tilde{f}\|_p \le \|f\|_p$ (já provado.

Prova: Se $f_n \longmapsto f$ em $\mathcal{L}^1$

(1) $\Rightarrow \tilde{f}_n \longmapsto \tilde{f}$ em $\mathcal{L}^1$ (obs. 2)

Basta provar o Teo. qdo $f \in \mathcal{L}^2(X)$.

Seja $F = \{ g \in \mathcal{L}^2(X),\ T\text{-invariante} \} = \{ g : T^{-1}\text{-invariante} \}$

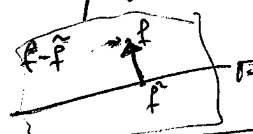
$g \circ T = g \Rightarrow g = g \circ T^{-1}$

(2) F é subespaço fechado de $\mathcal{L}^2(X)$.

$$\begin{cases} g_n \to g & \text{em } \mathcal{L}^2(X) \\ \tilde{g}_n = g_n \to \tilde{g} & \text{em } \mathcal{L}^2(X) \end{cases}$$

Logo $g = \tilde{g}$ é T-invariante q.t.p. ($\tilde{g}$ tem esta prop.)

(3) Seja $\pi : \mathcal{L}^2(X) \to F$ a projeção ortogonal



Af: $\pi(f) = \tilde{f}$

$\pi(f) = \hat{f}$

obs: $\widetilde{fg} = \tilde{f}\cdot\tilde{g} = \tilde{f}\cdot g$

$\begin{cases} g \in F \ T\text{-invariante} \in \mathcal{L}^2(X) \\ \forall f \in \mathcal{L}^2(X) \end{cases}$

$\tilde{f}\cdot g \leftarrow \frac{1}{n}\left(f + f\circ T + \dots + f\circ T^{n-1}\right)\cdot g =$

$= \frac{1}{n}\left(fg + (fg)\circ T + \dots + (f\cdot g)\circ T^{n-1}\right)$

$\downarrow$

$\widetilde{fg}$

Para provar (3) basta provar que $\forall g \in F$

$\langle (f-\tilde{f}), g\rangle_2 = 0$

$\langle f-\tilde{f}, g\rangle_2 = \int_X (f-\tilde{f})\cdot g\, d\mu = \int_X (fg - \tilde{f}g)\, d\mu$

$\mu(X) = 1 \Rightarrow \quad = \int_X \widetilde{(fg - \tilde{f}g)}\, d\mu = \int_X \widetilde{fg} - \int_X \widetilde{(\tilde{f}g)}$

Pela obs

$$= \int_X \tilde{f} \cdot g \, d\mu - \int_X \tilde{f} \cdot g \, d\mu = 0$$

~~Corolário 2 Para todo $A, B \in \mathcal{Q}$ existe o limite~~

$$\cancel{\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j}(A) \cap B)}$$

$$\cancel{\hat{F} = \{ g \in \mathcal{L}^2(X),\ T^{-1} \text{ invariante} \}}$$

$$\cancel{\boxed{\hat{F} = F}}$$

~~pois~~

$$\cancel{\begin{cases} g \circ T = g \\ \Rightarrow g \circ T \circ T^{-1} = g \circ T^{-1} \\ \Rightarrow g = g \circ T^{-1} \end{cases}}$$

~~Pelo Teor. da conv. dominada~~

$$\cancel{= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_X \sum_{j=0}^{n-1} f_A(T^j(x)) \cdot f_B \, d\mu =}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{\int_X f_A \circ T^{-j} \cdot f_B \, d\mu}_{\displaystyle = \int f_{(T^{-j}(A)\cap B)} \, d\mu}$$

$$= \lim_{n} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu\left(T^{-j}(A) \cap B\right) \quad //$$

(f) $\Rightarrow$ (a) Se A é T-invariante

$$\mu(A)\,\mu(A^c) = \lim \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \mu\left(T^{-m}(A) \cap A^c\right) = 0$$

$\Rightarrow$ $\mu(A) = 0$ ou 1 //

ou seja (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d) $\Leftrightarrow$ (e) $\Leftrightarrow$ (f)

(6)

Teor são equivalentes

(a) T ergódica

(b) $\lim_n \frac{1}{n} \cancel{\#} \{0 \le i \le n-1 : T^i(x) \in A\} = \mu(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$

Prova:

(a) ⇒ (b)

$$\lim \frac{1}{n} \cancel{\#} \{0 \le j \le n-1 : T^j(x) \in A\}$$

$$= \cancel{\lim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} f \circ T^i_{\chi(A)} = f}$$

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_{|A} \circ T^j \overset{\text{Birkhoff}}{=} \tilde{f}_A \overset{\text{ergodicidade}}{=} \text{cont qtp}$$

$$\tilde{f}_A \overset{\text{Birk}}{=} \int f_A \, d\mu = \mu(A)$$

(b) ⇒ (a)

$A \in \mathcal{A}$ é T-invariante e supor $\mu(A) > 0$

~~q. t. $T^{-1}(A) =$~~

$$\cancel{f_A \circ T = f_A}$$

$$\cancel{\# \{0 \le i \le n-1\}} \quad f_{T^{-1}(A)}$$

$$f_A \circ T = f_{T^{-1}(A)} = f_A \quad \text{qtp}$$

pois $T^{-1}(A) = A \mod 0$

$\cancel{T}^{-1}(A) = A \mod 0$ (hipótese)

$\Rightarrow f_A \circ T \doteq f_{T^{-1}A} \doteq f_A$ (qtp)

$\Rightarrow f_A$ T-invariante $\Rightarrow f_A$ cte qtp.

como $\mu(A) > 0 \Rightarrow f_A = 1$ qtp

$$\Rightarrow \mu(A) = \int f_A = 1 \quad //$$

<u>Proposição</u> Se existe $1 \leq p \leq \infty$ ~~...~~ e um conjunto denso $F \subset L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ (μ = Probab.) tal que $\int f(x)\,d\mu = \hat{f}(x)$ μ-qtp.

($\hat{f}$ = ~~média~~ Teor. de Birkhoff)

$\forall f \in F$. Então T é ergódico

<u>Prova</u>.- Como $\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f \circ T^j$ converge em $L^p(X)$ a $\hat{f}$, é suf. verificar que se $f \in L^p(X)$

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f \circ T^j - \int_X f\,d\mu \right\|_p = 0$$

Seja $\varepsilon > 0$. Escolhem $g \in F$ t.q.

$$\| g - f \|_p \leq \varepsilon/3$$

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $n \geq n_0 \Rightarrow$ $(g \in F)$

$$\left\| \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} g \circ T^j - \int_X g \, d\mu \right\|_p \leq \varepsilon/3$$

Então, se $n \geq n_0$

$$\left\| \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} f \circ T^j - \int_X f \, d\mu \right\|_p \leq$$

$$\frac{1}{n+1} \left\| \sum_{j=0}^{n} f \circ T^j - \sum_{j=0}^{n} g \circ T^j \right\|_p$$

$$+ \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} g \circ T^j - \int_X g \, d\mu \right\|_p$$

$$+ \left| \int_X g \, d\mu - \int_X f \, d\mu \right|$$

Como $\| f \circ T^j - g \circ T^j \|_p = \| (f-g) \circ T^j \|_p = \| f - g \|_p$

(μ é T-invariante)

e como $\left| \int_X g \, d\mu - \int_X f \, d\mu \right| = \left| \int_X (g-f) \, d\mu \right| =$

$$\leq \int_X |g - f| \, d\mu = \| g - f \|_1 \leq \| g - f \|_p$$

se μ é Prob.

Aparte: Se $p = 1$ ~~ok~~ $\left| \int_X g \, d\mu - \int_X f \, d\mu \right| \leq \| g - f \|_p$

Se $\infty > p > 1$, seja $q = \frac{p}{p-1}$ $\Rightarrow$ $\| g - f \|_1 \leq \| g - f \|_p \, \| 1 \|_q = \| g - f \|_p$ (desigualdade de Hölder)

pois μ é Prob.

aparte

Se $p=\infty$, $q=1$

$$\Rightarrow \quad \|g-f\|_1 \leq \|g-f\|_\infty \|1\|_1 = \|g-f\|_p$$

Seja q tq: $\begin{cases} p=1 \text{ então } q=\infty \\ 1<p<\infty \text{ então } q=\frac{p}{p-1} \\ p=\infty \text{ então } q=1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \|g-f\|_p \leq \|g-f\|_p \|1\|_q = \|g-f\|_p$$

Assim

$$\left\| \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} f\circ T^j - \int_X f\,d\mu \right\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Obs ao Teor: se X é σ-finito

$$a \xrightarrow{\text{Fatou}} c \Rightarrow e$$

~~Proposição: Se $T:(X,\mathcal{U},\mu) \circlearrowleft$ é ergódica~~ (prob.)

~~e $m:\mathcal{U} \to [0,1]$ é outra medida invariante sob T~~ $m, \mu \in M_T(X)$

Prop: $(X, \mathcal{O}l, \mu)$, $(X, \mathcal{O}l, m)$ esp. de Prob.

$T: X \to X$ mensurável

$\mu, m \in M_T(X)$

Suponha ~~(T, μ) é~~ T é μ-ergódica

Então são equivalentes

ⓐ $m \neq \mu$

ⓑ $m \not\ll \mu$

ⓒ $\exists\ A \in \mathcal{O}l$ T-invariante $(T^{-1}A = A \mod 0)$

tq $\mu(A) = 0$ e $m(A) \neq 0$

Prova ⓐ $\Rightarrow$ ⓑ

Por contradição suponha $m \ll \mu$

$T_*\mu = \mu$ (T-invariança)

$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{O}l$

$$m(A) = \int_A \frac{dm}{d\mu} \cdot d\mu = \int_A \frac{dm}{d\mu} d(T_*\mu)$$

$$= \int_A \frac{dm}{d\mu} \circ T\, d\mu$$

Pelo Teo. de Radon-Nikodym (unicidade de $\frac{dm}{d\mu}$ qtp) $\Rightarrow$ $\frac{dm}{d\mu} = \frac{dm}{d\mu} \circ T$ qtp

$\Rightarrow \frac{dm}{d\mu}$ é T-invariante $\xRightarrow{\text{ergodicidade}}$ $\frac{dm}{d\mu} =$ constante qtp

$\Rightarrow m = \mu$ (ambos são Prob.)

(b) $\Rightarrow$ (c)

Se $m \not\ll \mu$, existe $A_0 \in \mathcal{A}$

tq. $\mu(A_0) = 0$ e $m(A_0) \neq 0$.

Seja $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A_0)$

$T^{-1}(A) \subset A$ ~~$\Rightarrow A$ é T invariante~~

Como $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A) \Rightarrow T^{-1}(A) = A \mod (0)$

Certamente $\mu(A) = 0$ e $m(A) \neq 0$.

(c) $\Rightarrow$ (a) obvio

$\underbrace{M_T(X, \mathcal{A})}_{\text{convexo}} \subset M(X,\mathcal{A})$ $(X, \mathcal{A})$ esp. medida

$T: X \to X$ ~~preserva medida~~ mensuravel

$\mu, m \in M_T(X, \mathcal{A})$ $T: (X, \mathcal{A}) \to (X, \mathcal{A})$

$s\mu + (1-s)m \in M_T(X, \mathcal{A})$ " convexo

$s \in [0, 1]$

Ponto extremal de um convexo: $\mu \in M_T(X, \mathcal{A})$

Se não pode ser escrito com $\mu = s m_1 + (1-s) m_2$

com $s \in (0, 1)$

$m_1, m_2 \in M_T(X, \mathcal{A})$

$m_1 \neq \mu$

$m_2 \neq \mu$

<u>Proposição:</u> $\mu \in M_T(X, \mathcal{A})$ é ergódica $\iff$ μ é ponto extremal de $M_T(X, \mathcal{A})$.

<u>Prova</u>

$\boxed{\Longrightarrow}$

Por contradição suponha μ ergódica tq

$$\mu = s m_1 + (1-s) m_2 \quad . \quad s \in (0,1)$$

com $m_1, m_2 \in M_T(X, \mathcal{A})$

$\Rightarrow m_1 \ll \mu$ ~~(pois $s \neq 0$~~ ~~$\mu(A) = 0 \Rightarrow$~~

~~Seja A_0 tq $\mu(A_0) = 0$~~ $\Rightarrow \mu(T^{-1}A_0) = 0$

$\Rightarrow$ ~~$\mu(A) = 0$~~ , $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A_0)$

~~$T^{-1}(A) = A$~~ mod 0.

Pois caso contrário $\overset{\text{Prop. Anterior}}{\Rightarrow} \exists\, A \in \mathcal{A}$ T-invariante

$\mu(A) = 0$ e $m_1(A) \neq 0 \Rightarrow$

$0 = \mu(A) = s m_1(A) + (1-s) m_2(A) \geq s m_1(A) > 0$

$\Rightarrow \Leftarrow$

$\overset{\text{Prop anterior}}{\Rightarrow} m_1 = \mu.$

Similarmente $m_2 = \mu$

$\boxed{4}$ A provar

μ não é ergodica $\Rightarrow$ μ não é extremal

$\mu \in M_T(X, \mathcal{Q})$ não erg $\Rightarrow$ $\exists$ $A_0 \in \mathcal{Q}$

T-invariante com $0 < \mu(A_0) < 1$.

defini $m_1, m_2 \in T_T(X, \mathcal{Q})$ com

$$m_1(A) = \frac{1}{\mu(A_0)} \mu(A \cap A_0)$$

$$m_2(A) = \frac{1}{\mu(A_0^c)} \mu(A \cap A_0^c)$$

$$m_1(A_0) = 1 \qquad m_1(A_0^c) = 0$$

$$m_2(A_0^c) = 1 \qquad m_2(A_0) = 0$$

$$\cancel{\mu = m_1 + m_2}$$

$$\mu = \mu(A_0) \cdot m_1 + \mu(A_0^c) \cdot m_2$$

Dado $A \neq \emptyset$

$\cancel{\mu(A_0)\ m(A) +}$

$$\mu(A_0) \cdot m_1(A) + \mu(A_0^c) m_2(A) =$$

$$\mu(A \cap A_0) + \mu(A \cap A_0^c) = \mu(A)$$