Bifurcações de Hopf-Takens em $\mathbb{R}^2$

X com $J^1(X)_{(0)}$ tem um par de autovalores imaginários puros (não nulos)

Estudamos os desdobramentos C^∞ (X_μ) de X

1. Via uma mudança linear de coordenadas,

$$X_0 = \alpha\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) + O(\|(x,y)\|^2)$$

with $\alpha > 0$.

2. Pelo Teorema da forma normal podemos supor que

$$J_\infty(X_0)(0) =$$

$$\left(\alpha + \sum_{i\geq 0} b_i (x^2+y^2)^i\right)\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left(\sum_{j\geq 1} a_j (x^2+y^2)^j\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Def.: X_0 é de codimensão k se $a_k \neq 0$ e $a_j = 0$, $1 \leq j \leq k$

(2)

Def.- Dois desdobramentos (X_μ) e (Y_μ) são chamados (fracamente C^∞, Id) - equivalentes se $\exists$ uma difeo local C^∞

$$(z,\mu) \to (h(z,\mu),\mu)$$

numa viz. de $(0,0)$ tal que para cada μ, $h_\mu(z) = h(z,\mu)$ leva singularidades de X_μ a singularidades de Y_μ preservando o tipo (sela ou fonte) e levando órbitas fechadas de X_μ a órbitas fechadas de Y_μ também preservando sua natureza atratora ou repulsora.

(h_μ não preserva)

Objetivo: Mostrar que o desdobramento (fraco C^∞, C^∞) - versal da singularidade acima (de codimensão k) é dado por

$$x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\alpha_k}{|\alpha_k|}\left((x^2+y^2)^k + \lambda_{k-1}(x^2+y^2)^{k-1} + \dots + \lambda_0\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Seja agora qq. desdobramento (X_μ) de X dependendo em n parâmetros $\mu \in \mathbb{R}^n$. Em 5 passos reduzimos X_μ a uma forma normal útil. Usamos a notação.

$$m = (x, y).$$

1. X_μ é localmente (C^∞, Id) - conjugado a X_μ^1 com $X_\mu^1(0) = 0$

$$\tilde{X} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\hat{X} : ((x,y), \lambda) \longrightarrow$$

$$\frac{\partial \tilde{X}}{\partial m} = D\tilde{X}(0,0) \cdot \text{ invertible} \Rightarrow$$

$$\tilde{X} = (f(y), y) \equiv 0$$

Definir $F(m,y) = (m - f(y), y)$

$F^{-1}(m, y) = (m + f(y), y)$

$F_* \tilde{X} = X'$

$X'(0,y) = DF_0 \tilde{X} \circ F^{-1} = DF_0 \tilde{X}(0 + f_y, y) = 0$

2) X^1_y é localmente (C^∞, Id)- conjugado a X^2_y com

$$X^2_y(m,y) = \alpha_1(y)\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) + \alpha_2(y)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) + \cancel{\Theta(\|m\|^2)}\ \Theta\|(m, y)\|^2$$

com $\alpha_1(0) = \alpha > 0$ e $\alpha_2(0) = 0$

Isto depende no Teorema da forma Normal de Jordan, dependente - C^∞ em y.

3) X_μ^2 é localmente (C^∞, Id)- conjugado

a X_μ^3 com

$$X_\mu^3(m,\mu) = f_1((x^2+y^2),\mu)\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$
$$+ f_2((x^2+y^2),\mu)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) + \tilde{X}$$

onde f_1, $\tilde{X}$ são C^∞, $f_1(0,0) = \alpha > 0$

$$\tilde{X} = \tilde{X}_1\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{X}_2\frac{\partial}{\partial y}$$

com $\tilde{X}_i = o(\|m\|^\infty)$

Teorema de Broer.

④ X_μ^3 é localmente (C^∞, Id)- equivalente a

X_μ^4 com

$$X_\mu^4(m,\mu) = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} + \left[\boxed{g_1}((x^2+y^2),\mu)\right.$$
$$\left.+ g_2(x,y,\mu)\right]\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

com g_i de classe C^∞, $g_1(0,0)=0$

$g_2 = O(\|m\|^\infty)$.

Dem:

$$R(x,y,\mu) = \langle X_\mu^3, x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\rangle$$

$$= (x^2+y^2)\, f_1\left((x^2+y^2),\mu\right) + \langle \tilde{X}, x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\rangle$$

Seja $\bar{R}(x,y,\mu) = \dfrac{R(x,y,\mu)}{(x^2+y^2)} \in C^\infty$

e $\bar{R}(x,y,\mu)$ é não zero para (x,y) pequeno.

Definimos $X_\mu^4 = \dfrac{(x^2+y^2)}{R(x,y,\mu)} \cdot X_\mu^3$

(5) X_μ^4 é localmente (C^∞, Id) - conjugado a X_μ^5 com as seguintes propriedades

(i)

$$X_\mu^5(m, \mu) = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$$
$$+ [\tilde{g}_1((x^2+y^2), \mu)$$
$$+ \tilde{g}_2(x, y, \mu)\,[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y})$$

com $\tilde{g}_i$ de classe C^∞, $\tilde{g}_1(0,0) = 0$ e $\tilde{g}_2 = 0(\|m\|^\infty)$.

(ii) Existe uma vizinhança U de $(0,0)$ tal que quando um ponto (x_0, y_0, μ) ~~est~~ de U está numa órbita periódica $\mathcal{C}$ de X_μ^5, então

$$\mathcal{C} = \{(x,y) / x^2+y^2 = x_0^2 + y_0^2\}$$

8

<u>Proof</u>.- Seja $\{X^4_t\}$ o fluxo de X^4 (já seja definido localmente ou definido globalmente, via um processo de globalização.)

Seja $R_\phi(x,y,\mu) = (x\cos\phi - y\,\mathrm{sen}\,\phi,\ x\,\mathrm{sen}\,\phi + y\cos\phi, \mu)$

and define

$$\Phi(x,\mu) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(R_{-\phi} \circ X^4_\phi(x,\mu) \right) d\phi, \mu \right)$$

$$DX^4(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{\phi(DX^4(0,0))} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\mathrm{sen}\,\phi \\ \mathrm{sen}\,\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$R_{-\phi}(\cdot,\cdot,0) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Logo $\quad D\phi(0,0) = Id.$

$\Rightarrow \quad \phi$ é difeomorfismo local C^∞ em $(0,0)$

Como: $J_{\infty}(X^4)(0,0)$ é invariante por rotações R_ϕ, o mesmo é verdadeiro para $J_{\infty}\Phi(0,0)$
e assim também para $J_{\infty}(X^5)(0,0)$

com $\quad X^5 = \Phi_* X^4$

Assim, Obtemos que X_μ é localmente (C^∞, Id)- equivalente a uma família Y_μ que tem a propriedade de simetria:

ou seja: ~~de~~

$$Y_\mu(x,y) = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$$

$$+\left(g_0((x^2+y^2),\mu)\right) + g_2(x,y,\mu)\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Supomos Y_μ globalmente definido

De agora em diante o caso $a_2>0$.

<u>Definição</u>: Dada uma família X_μ com a propriedade de simetria, a função "deplazamento" como uma função C^∞

$$D: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$$

com as propriedades seguintes:

(1) $D(r, \mu) = D(-r, \mu)$

$\forall (r, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\nu}$

(2) $D(0, \mu) = 0$

(3) [redacted] (x, y) está numa órbita fechada de X_μ $\Leftrightarrow$ $D((x^2+y^2)^{1/2}, \mu) = 0$

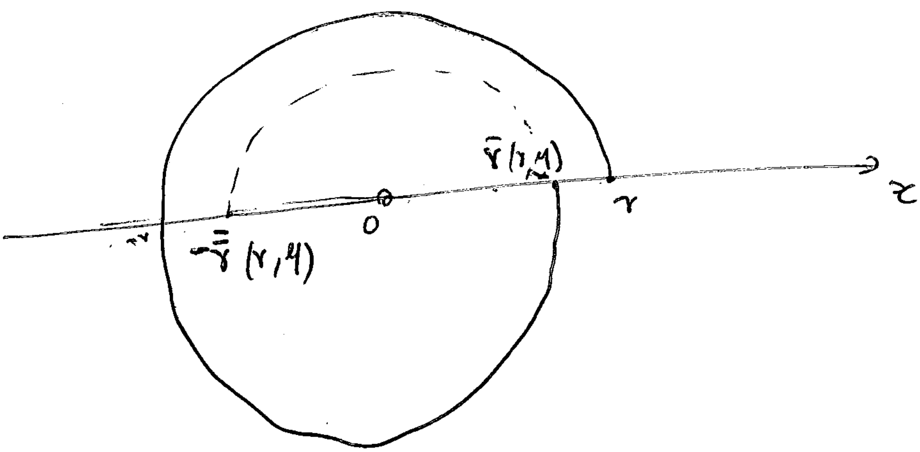
(4) Se $D(r_0, \mu) > 0$ (resp $D(r_0, \mu) < 0$)

Então todos os pontos (x, y, μ) com $x^2 + y^2 = r_0^2$ são errantes; o conjunto ω-limite de tais pontos está contido em $\{(x, y, \mu) / x^2+y^2 > r_0^2\}$ (resp. $\{(x, y, \mu) / x^2+y^2 < r_0^2\}$) e o α-limite em $\{(x, y, \mu) \mid x^2+y^2 < r_0\}$ (resp. $\{(x, y, \mu) / x^2+y^2 > r_0\}$).

Se X tem a propriedade de simetria, podemos sempre construir uma função deslocamento D para X como segue:

Dado $r \in \mathbb{R}$ definimos $\bar{r}(r,y)$ como

$$X_{2\pi}(r,0,y) = (\bar{r},0,y)$$



e também $\bar{\bar{r}}(r,y)$ como

$$X_{2\pi}(-r,0,y) = (-\bar{\bar{r}},0,y)$$

Então

$$D_X(r,y) = r\left(\bar{r} - r + \bar{\bar{r}} - r\right)$$

Se X_0 é de codimensão k

$$\Rightarrow \quad D_X(r,0) = r^{2k+2} f(r) \quad \text{para algum}$$

função C^∞, f, com $f(0) > 0$ $(a_k > 0)$

Seja X_+^k a família

$$x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{a_k}{|a_k|}\left((x^2+y^2)^k + \lambda_{k-1}(x^2+y^2)^{k-1} + \dots + \lambda_0\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Para esta família temos a seguinte função deslocamento

$$D^k(r, \lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}) = r^{2k+2} + \lambda_{k-1} r^{2k} + \dots + \lambda_0 r^2$$

Assim, o estudo da fraca (admitida) (C^∞, C^{∞})-equivalencias de estes familias X_y pode ser reduzido ao estudo de equivalencia a direita de sua funções deplazamento.

Seja X_μ com $\mu \in \mathbb{R}^n$, e Y_γ com $\gamma \in \mathbb{R}^m$ duas familias com a propiedade de simetria e sejam D_X e D_Y as funções deplazamento associados.

Suponha que possam achar uma familia C^∞ de difeos locais (1-variavel)

$$H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$$

$$H(r, \mu) \mapsto (G(r^2, \mu) r, h(\mu))$$

com $D_Y \circ H = D_X$ numa viz. de $(0,0)$.

Então X é fracamente (C^∞, Id) equivalente a algum deslocamento C^∞-induzido Y mediante a aplicação

$$\bar{H}((x,y),\mu) = \left(G(x^2+y^2,\mu)(x,y),\, h(\mu)\right)$$

Assim toda a problemática é reduzida a Teoria dos singularidades simétrica (pa equivalência a direita de tipo simetrico por funcões simétrica C^∞).

A parte final da prova segue do seguinte Teorema, que pode ser achado em Takens 3. (análogo ao um Teorema de Mather)

Seja $F: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função C^∞ com

$F(x,0) = x^{2k} f(x)$ para algum f com $f(0)>0$

$F(0,y) = 0 \quad \forall y$ próximo de 0

$F(x,y) = F(-x,y) \quad \forall (x,y)$ próximo de $(0,0)$

Então $\exists$ uma função C^∞ H de uma viz. U de $(0,0)$ em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ em uma vizinhança de $(0,0)$ em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{k-1}$ tal que

① $H(0,0) = (0,0)$ e $H(\{0\}\times\mathbb{R}^n) \subset \{0\}\times\mathbb{R}^{k-1}$

② Existe uma aplicação C^∞

$h: \pi_n(U) \mapsto \mathbb{R}^{k-1}$

com $\pi_{k-1} \circ H = h \circ \pi_n$

③ $\forall y \in \pi_n(U)$, H_y preserva orientação

$H_y : U \cap \pi_1^{-1}(y) \mapsto \pi_{k-1}^{-1}(h(y))$

4 $F(x, y) = V \circ H(x, \mu)$ para $(x, \mu) \in U$

onde

$$V(y, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) = y^{2k} + \lambda_{k-1} y^{2k-2} + \dots + \lambda_1 y^2$$

5 H ~~is~~ é simétrica no sentido que se

$h(x, \mu) = (y, \lambda)$ então

$H(-x, \mu) = (-y, \lambda)$.