Estratto dal *Bollettino dell' Unione Matematica Italiana*
Anno XIV - N.i 4-5 - Ottobre-Dicembre 1935
Edito dalla Casa Editrice NICOLA ZANICHELLI, Bologna

Alcune osservazioni su di un'affermazione del Dehn circa la decomponibilità in celle delle varietà topologiche ad n dimensioni.

Nota di ACHILLE BASSI (a Torino).

Sunto. - *Si osserva che un' affermazione del* DEHN, *secondo la quale ogni varietà chiusa, ad* n *dimensioni è reticolabile mediante un complesso costituito al più di quattro* n-*elementi, è inesatta, e che il numero minimo di* n-*elementi con i quali si può reticolare ogni* n-*varietà chiusa è invece almeno uguale ad* n + 1.

Il DEHN nella sua Memoria intitolata: *Ueber die Topologie des dreidimensionalen Raumes* (1), dopo aver dimostrato (pagg. 165-167) che il continuo costituito da una qualsiasi varietà chiusa (priva di contorno), a tre dimensioni, può essere reticolato da un complesso costituito di quattro 3-elementi (2), afferma che si può provare con facilità, con lo stesso procedimento di cui egli si vale, che ogni varietà ad n dimensioni può essere reticolata da un complesso costituito di quattro n-elementi (3).

(1) « Mathematische Annalen », Band 69, 1910, pagg. 137-168.

(2) Un n-elemento è un complesso, una cui suddivisione ha (per un opportuno ordinamento dei suoi simplessi) le stesse matrici di incidenza di una suddivisione di un n-simplesso (vedi su ciò, ad esempio, J. W. ALEXANDER, *The combinatorial theory of complexes* « Annals of Mathematics », serie 2a, vol. 31, 1931, pagg. 294-322; lavoro che citerò in seguito con J. W. ALEXANDER). Da un notevole recentissimo lavoro del NÖBELING (*Zur Topologie der Mannigfaltigkeiten*, « Monatshefte für Mathematik und Physik », Band 42, 1935, pagg. 117-152) si ricava, tra altri importanti risultati, che ogni complesso che, come insieme di punti, è omeomorfo ad un n-simplesso è un n-elemento.

(3) Egli infatti, svolta la dimostrazione della proprietà sopra accennata, aggiunge che (cap. III, pag. 167, ultime righe del § 1): « *Es sei nur bemerkt dass sich diese Ueberlegungen unmittelbar auf beliebig viele Dimensionen erweitern lassen, woraus unter anderm folgt, dass jede homogene* M_n, *für jedes beliebige* n, *sich aus vier Elementarmannigfaltigkeiten zusammensetzen lässt...* ».

Questa affermazione contrasta con alcuni risultati cui pervenni in due miei lavori [4], e che sono una facile conseguenza di altri del LUSTERNIK e dello SCHNIRELMANN.

Nel secondo di questi lavori mi ripromisi quindi di prendere in esame l'affermazione del DEHN, per mostrarne l'inesattezza [5].

Qui infatti esamino il motivo per cui le considerazioni del DEHN, che giungono a conclusioni esatte nel caso di $n=3$, non si possono estendere, se $n>3$, a dimostrare quanto questo Autore afferma. Espongo inoltre, con opportuni schiarimenti, le considerazioni del LUSTERNICK e dello SCHNIRELMANN, su cui si basano i miei risultati, considerazioni che si svolgono nel campo delle più recenti teorie di topologia delle varietà.

Viene così chiaramente dimostrata l'esattezza dei miei risultati e quindi l'inesattezza dell'affermazione del DEHN. Precisamente viene dimostrato che, indicato con μ il numero minimo di n-elementi di cui è costituito un complesso che reticola una n-varietà, e indicato con μ_n il valore massimo che la μ assume nelle varietà ad n-dimensioni, μ_n, se è finito, è $\geq n+1$. Questo risultato è quindi in contraddizione, per ogni $n>3$, con l'affermazione del DEHN, secondo cui sarebbe $\mu_n \leq 4$.

In un prossimo lavoro dimostrerò, con più precisione, che $\mu_n = n+1$.

I.

1. Il procedimento di dimostrazione del DEHN (che qui espongo per le varietà ad n dimensioni, precisandolo ulteriormente, in modo da renderlo completamente rigoroso) è il seguente:

Sia A una n-varietà simpliciale del BROUWER [6], connessa, chiusa (cioè priva di contorno), e in cui mai due simplessi distinti abbiano gli stessi vertici.

Si consideri in essa un n-simplesso s_1, poi un altro n-simplesso s_2, avente in comune con s_1 un $(n-1)$-simplesso b_1 del contorno di entrambi, indi un terzo n-simplesso s_3, avente un suo $(n-1)$-simplesso contorno b_2 in comune con il contorno dell'insieme $A_2 = s_1 + s_2$,

(4) *Sulla riemanniana dell'* S_n *proiettivo* (« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », tomo LVI, 1932, pagg. 228-237, n. 4) e *Un problema topologico di esistenza* (« Memorie della R. Accademia d'Italia », vol. VI, 1935, pagg. 669-714, n. 18).

(5) Vedi il secondo lavoro citato, annotazione n. 9.

(6) La definizione trovasi in L. E. J. BROUWER, *Ueber Abbildung von Mannigfaltigkeiten* (« Mathematische Annalen », Band 71, 1912, pagg. 97-115); vedasi anche A. BASSI, *Su di alcuni modelli topologici del Poincaré* (« Memorie della R. Accademia d'Italia », vol. VI, 1935, n. 2).