Integral primeira

Aula # 5

$f: M \xrightarrow{C^2} M$ difeo

$H: M \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ integral primeira de f

se:

1. $H \circ f = H$
2. $\exists$ valores regulares $c \in \mathbb{R}$ tq $H^{-1}(c) \neq \emptyset$

($H^{-1}(c)$ subvariedad invariante por f) tq $f(H^{-1}(c)) = H^{-1}(c)$

Proposição: Seja f um difeo de M que preserva uma forma de volume ω. Se f possui uma integral primeira $H: M \to \mathbb{R}$ e c é um valor regular tq $H^{-1}(c) \neq \emptyset$, existe uma forma de volume sobre $H^{-1}(c)$ invariante sob

$f|H^{-1}(c)$

Prova :-

Definimos uma forma de volume $\tilde{\omega}$ em $H^{-1}(c)$ da seguinte forma

se $x \in H^{-1}(c)$ e $v_1, \ldots v_{n-1} \in T_x H^{-1}(c)$

$$\tilde{\omega}_x(v_1, \ldots, v_{n-1}) = \omega_x(v, v_1, \ldots v_{n-1}) \quad \underline{(1)}$$

onde $v \in T_x M$ ~~...~~

e tq $(D_x H) v = 1$

① $\tilde{\omega}_x$ esta bem definido: se $v, \hat{v} \in T_x M$ e

$$D_x H\, v = D_x H \cdot \hat{v} = 1$$

$$\Rightarrow D_x H (v - \hat{v}) = 0 \Rightarrow v - \hat{v} \in T_p M$$

$$\Rightarrow \omega_x(v - \hat{v}, v_1, v_2 \ldots v_{n-1}) = 0$$

$$\Rightarrow \omega_x(v, v_1, v_2, \ldots v_{n-1}) = \omega_x(\hat{v}, v_1, v_2 \ldots v_{n-1})$$

② $f^* \tilde{\omega} = \tilde{\omega}$.

$x \in H^{-1}(c)$ e $v_1, \ldots v_{n-1} \in T_x H^{-1}(c)$

$$(f^* \tilde{\omega})_x (v_1, \ldots v_{n-1}) = \tilde{\omega}_{f(x)}(D_x f \cdot v_1, \ldots, D_x f \cdot v_{n-1})$$

(*2) $= \omega_{f(x)}(w, D_x f \cdot v_1, \ldots D_x f \cdot v_{n-1})$, onde $w \in T_{f(x)} M$

satisfaz $(D_{f(x)} H) w = 1$.

Seja $w_0 \in T_x M$ tq $(D_x f) w_0 = w$.

Como $H \circ f = H$

$$\Rightarrow (D_{f(x)} H)(D_x f) = D_x H$$

$$\Rightarrow (D_x H) w_0 = (D_{f(x)} H)(D_x f) w_0$$

$$= (D_{f(x)} H) w = 1 \qquad (*3)$$

Então $(*2)$ pode-se escrever

$$(f^* \tilde{\omega})_x (v_1, \dots, v_{n-1}) = \omega_{f(x)} ((D_x f) w_0, D_x f v_1, \dots, D_x f v_{n-1})$$

$$= (f^* \omega)_x (w_0, v_1, \dots, v_{n-1})$$

Como ω é invariante por f

$$(f^* \omega)_x (w_0, v_1, \dots v_{n-1}) = \omega_x (w_0, v_1, \dots v_{n-1})$$

por $(*3)$ e definição de $\tilde{\omega}$

$$\omega_x (w_0, v_1, \dots v_{n-1}) = \tilde{\omega}_x (v_1, \dots v_{n-1})$$

i.e:

$$f^* \tilde{\omega}_x (v_1 \dots v_{n-1}) = \tilde{\omega}_x (v_1, \dots v_{n-1}) \quad \forall x \in H^{-1}(c)$$

i.e. $\tilde{\omega}$ é invariante por $f|_{H^{-1}(c)}$

Hamiltonianos:

Uma var. simplética é um par

(M, ω) onde M = var.
ω = 2-forma fechada C^∞ <u>não degenerada</u>

não deg: dado $v \in T_xM$ $\left\{ \begin{array}{l} \omega_x(v, w) = 0 \quad \forall w \in T_xM \\ \Downarrow \\ v = 0 \end{array} \right.$

<u>Ex 1</u> $U = \mathbb{R}^{2n}$ aberto $(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, \dots p_n)$

ω a 2-forma

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$$

<u>Ex. 2</u>: (M^2, ω) ω forma de volume

<u>Def.-</u> (M_1, ω_1), (M_2, ω_2) variedades simpléticas

$f: M_1 \to M_2$ é difeo simplético se

$f^*\omega_2 = \omega_1$ i.e. dado $x \in M_1$, $v_1, v_2 \in T_xM_1$

$$(f^*\omega_2)_x(v_1, v_2) = (\omega_2)_{f(x)}(D_xf \cdot v_1, D_xf \cdot v_2)$$

$$\parallel$$

$$(\omega_1)_x(v_1, v_2)$$

Teorema (Darboux):

Seja (M, ω) variedade simplética de dimensão $2n$. Todo ponto de M possui uma viz. V tal que $(V, \omega|_V)$ é simplectomorfa a

$$\left(U, \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i = \alpha\right) \quad U = \mathbb{R}^{2n}$$

$$(q_1 \dots, q_n, p_1 \dots p_n)$$

~~$\tilde{\omega} = dq_1 \wedge dq_2 \wedge \dots dq_n \wedge dp_1 \wedge \dots \wedge dp_n$~~

$$\hat{\omega} = \alpha \wedge \alpha \wedge \dots \wedge \alpha \quad n\text{-vezes}$$

$$\left(\sum dp_i \wedge dq_i\right) \wedge \left(\sum dp_i \wedge dq_i\right) \dots \wedge \left(\sum dp_i \wedge dq_i\right)$$

$$= (dp_1 \wedge dq_1) \wedge (dp_2 \wedge dq_2) \wedge \dots \wedge (dp_n \wedge dq_n)$$

$$+ (dp_2 \wedge dq_2) \wedge (dp_1 \wedge dq_1) \wedge (dp_3 \wedge dq_3) \dots$$

$$\vdots$$

$$= n \; dp_1 \wedge dq_1 \wedge dp_2 \wedge dq_2 \wedge \dots \wedge dp_n \wedge dq_n$$

$\Rightarrow$ ω é não degenerada.

$\Rightarrow$ M é orientável

(M, ω) Tem forma de volume ass.

$$\hat{\omega} = \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{n \text{ vezes}}$$

Afirmação - $\omega: E \times E \to \mathbb{R}$ é forma bilinear não degenerada e $f: E^*$ então $\exists!$ $v_f \in E$ tq

$$\omega(v_f, w) = f(w) \quad \forall\, w \in E$$

$$\exists \quad A: E \longrightarrow E^* \qquad A(v) = \omega(v, \cdot)$$
$$v \longrightarrow A(v)$$

~~$A(v) = \omega(v,$~~

$$A(v) \cdot w = \omega(v, w)$$

A linear ~~$A(\lambda v_1 + v_2) = \omega(\lambda v_1 + v_2, w$~~

~~$A(\lambda v_1 + v_2) \cdot w = \omega$~~

$A(v) = 0 \Rightarrow v = 0$

isto é A é isomorfismo.

Seja (M, ω) variedade simplética

$$H: M \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$$

Dado $x \in M$ $\exists$ um único vetor $\nabla_x^\# H$ tal que

$$\boxed{D_x H \cdot w = \omega_x(\nabla_x^\# H, w)} \quad \forall\, w \in T_x M$$

Temos $\nabla^\# H$ é campo vetorial chamado gradiente simplético.

Campos Hamiltonianos são aqueles que são gradientes simpléticos de alguma função a valores reais.

<u>Ex 1</u>: $U \subset \mathbb{R}^{n}$ aberto $\quad (q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n)$

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$$

$$H : U \to \mathbb{R}$$

Af: 1 $\quad \nabla^{\#} H = \left(\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial H}{\partial q_n}, \dots \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots \frac{\partial H}{\partial p_n} \right)$

$$D_x H \cdot e_1 = \omega \left(\overset{\nabla^{\#} H}{\cancel{\sum b_i \frac{\partial}{\partial q_i}}}, e_1 \right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} = 1^{\underline{a}} \text{ coordenada de } \nabla^{\#} H$$

etc . .

<u>Af: 2</u> $\quad H$ é uma integral primeira de $\nabla^{\#} H$ ie

$$(D_x H) \nabla^{\#}_x H = 0 \quad \text{de fato:}$$

$$(D_x H)(\nabla^{\#}_x H) = \omega_x (\nabla^{\#}_x H, \nabla^{\#}_x H) = 0$$

$$(\omega_x \text{ é alternada})$$

$\nabla^\# H$ preserva a forma de volume $\bar{\omega}$
Proposição: e gera fluxo de difeos simpléticos

Seja

$\nabla^\# H$ preserva a forma de volume $\tilde{\omega}$
e gera fluxo de difeos. simpléticos

Proposição:

Seja (M, ω) uma variedade simplética. Se X é um campo C^1 sobre M as seguintes condições são equivalentes:

ⓐ X é localmente Hamiltoniano, isto é, todo ponto e M possui uma viz V onde está definida uma função $H : V \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla^\# H = X|V$$

ⓑ Se $\varphi : D \subset \mathbb{R} \times M \to M$ é o fluxo gerado por X, $\forall\, T > 0$ e $|t| < T$ o difeo $\varphi_t|_{D_T} : (D_T, \omega|_{D_T}) \to (\varphi_t(D_T), \omega|_{\varphi_t(D_T)})$ é simplético:

ⓒ $d(i_X \omega) = 0$

Prova:

(c) $\Rightarrow$ (a)

1-forma

Se $d(i_X \omega) = 0 \Rightarrow$

$i_X \omega|_U = DH$ (localmente em viz U)

$H : U \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$

assim $\forall p \in U$ e $w \in T_pM$

$(D_p H) w = (i_X \omega)_p (w) = \omega_p (X(p), w)$

$(D_p H) w = \omega_p (X(p), w)$

$\Leftrightarrow \quad X(p) = \nabla_p^{\#} H \quad p$ em U

(a) $\Rightarrow$ (c) Hipóteses $\nabla^{\#} H = X|V$

onde $H : V \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$.

Af: $i_{\nabla^{\#} H} \omega = DH$ (implicará $\Rightarrow d(i_{\nabla^{\#} H} \omega) = 0$) "$d(i_X \omega) = 0$"

de fato se $p \in V$ e $w \in T_pV$

$(i_{\nabla^{\#} H} \omega)_p (w) = \omega(\nabla_p^{\#} H, w) = DH_p \cdot w$

(c) $\Rightarrow$ (b). Suponhamos $X \in C^2$. Então

$$\boxed{L_X \omega = d(i_X \omega) + i_X(d\omega)} \text{ geral}$$

Porém: $d\omega = 0$ (fechada)

Assim $\underline{L_X \omega} = d(i_X \omega) = 0$ (por (c))

Se $p \in D_T$; $v, w \in T_pM$ e $|t_0| < T$,

$$\frac{d}{dt}\left[\omega_{\varphi_t(p)}\left((D_p\varphi_t)v, (D_p\varphi_t)w\right)\right]_{t=t_0} =$$

$$\overset{\text{Def}}{=} (L_X \omega)_{\varphi_{t_0}(p)}\left((D_p\varphi_{t_0})v, (D_p\varphi_{t_0})w\right) = 0$$

Portanto, para todo $|t| < T$:

$$\omega_{\varphi_t(p)}\left((D_p\varphi_t)v, (D_p\varphi_t)w\right) = \omega_p(v,w) + \int_0^t (L_X\omega)_{\varphi_s(p)}\left((D_p\varphi_s)v, (D_p\varphi_s)w\right) ds$$

$$= \omega_p(v,w).$$

$$(\varphi_t^* \omega)_p (v,w) = \omega_p(v,w)$$

Decomposições em frações contínuas

$\varphi : [0,1] \circlearrowleft$

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right] \quad , \text{ se } x \neq 0$$

$$\varphi(0) = 0$$

$$\mu(A) = \frac{1}{\log 2} \int \frac{dx}{1+x}$$

Definição: $\{t_n\}_{n \geq 1}$ seq. de # reais é normal se

1) $t_n \geq 0 \quad \forall n$

2) $t_j = 0 \Rightarrow t_m = 0 \quad \forall m \geq j$

Definir $|t_1|t_2|t_3 \ldots |t_k = \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{t_2 + \cfrac{1}{\ddots \; t_{j-1} + \cfrac{1}{t_j}}}}$

ⓐ Se $t_1 = 0$ defina $t_1|t_2|t_3 \ldots |t_k = 0$

ⓑ Se $\lim_{k \to \infty} |t_1|t_2| \ldots |t_k| = \alpha$ existe

$\alpha = |t_1|t_2| \ldots |t_k| \ldots$

Teorema.

1) $\forall$ seq. nond de inteiros $n_1, n_2 \ldots,$ existe $|n_1|n_2| \ldots$ e

$$\left| \, |n_1|n_2|\ldots|n_k\ldots - |n_1|n_2|\ldots|n_k \right| \leq \frac{1}{k+1}$$

para todo $k \geq 0$

(2) Para todo $0 \leq x \leq 1$ existe uma seq. nonal de inteiros tq.

$x = |n_1|n_2 \ldots$

Lema.-

~~(1) Seja $S \subset [0,1]$ que não contenha únicamente o zero, vale~~

~~$\varphi^{-1}(S) \cap I_n$ não é nem $\emptyset$ nem $\{0\}$.~~

~~para todo n, onde $I_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$~~

(2) Para toda seq. nond de inteiros $n_1, n_2, n_3, \ldots$ positivos o conjunto

$$\bigcap_{j=1}^{k} \varphi^{-j}(I_{n_j}) \qquad k = 1, 2 \ldots$$

são intervalos não vazios e

$$\lambda\left(\bigcap_{j=0}^{k} \varphi^{-j}(I_{n_j})\right) \leq \frac{1}{k+1}$$

Para todo k (λ = med. de Lebesgue)

Prova do Teor. usando o Lema:

Seja $n_1, n_2, \ldots$ uma seq. usual de inteiros

Se algum deles é zero Teor. ok:

Se todos os n_k são positivos.

$\forall k \geq$ e $\ell \geq 0$

$$|n_1|n_2|\ldots|n_k \,,\, |n_1|n_2\ldots|n_{k+\ell} \in \bigcap_{j=0}^{k} \varphi^{-j}(I_{n_j}) \text{ intervalo}$$

$$\Rightarrow \left|\, |n_1|n_2|\ldots|n_k - |n_1|n_2\ldots|n_{k+\ell} \right| \leq \frac{1}{k+1}$$

então $\lim \{ |n_1|n_2\ldots|n_k \}$ é de Cauchy

$x = \lim_{k\to\infty} |n_1|n_2\ldots|n_k$ e satisfaz (1) do Teor.

Seja $x \in [0,1]$ definimos

n_j , $j = 1, 2 \ldots$

$$\begin{cases} n_j & \text{se } \varphi^j(x) \in I_{n_j} \\ 0 = n_j & \text{se } \varphi^j(x) = 0 \end{cases}$$

~~se $\varphi^j(x) \neq 0$~~

~~$\varphi^j x \in ($~~

A seq. é normal.

$$|n_1|n_2 \ldots |n_k \in \bigcap_{j=0}^{k} \varphi^{-j} I_{n_j}$$

$$\left| x - |n_1|n_2 \ldots |n_k| \right| \leq \frac{1}{k+1}$$

logo $x = |n_1|n_2 \ldots$