(1)

T contínua

$(\leq)$ Vamos provar que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \mu \in M_T(X)$ tal que

$$h_\mu(T) \geq s(\varepsilon) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log s(n;\varepsilon)$$

Isto garantirá que

$$\sup_{\mu \in M_T(X)} h_\mu(T) \geq \lim_{\varepsilon \to 0} s(\varepsilon) = h_{top}(T)$$

Seja $\varepsilon > 0$ e E_n conj. $(n;\varepsilon)$-separado de cardinalidade (maxima) $= s(n;\varepsilon)$.

Definimos

$\dot{x}$ $\dot{T(x)}$

(1) $$\sigma_n = \frac{1}{s(n;\varepsilon)} \sum_{x \in E_n} \delta_x$$

$$\mu_n = \frac{1}{n}\left(\sigma_n + T_*\sigma_n + \dots + T_*^{n-1}\sigma_n\right)$$

$T_*\sigma_n = \sigma_n \circ T^{-1}$, $T_*^{n-1}\sigma_n = \sigma_n \circ T^{-n+1}$, $\sigma_n = \delta$

(2)

Como $M(X)$ é compacto, $\exists \mu \in M(X)$ tq $\mu_{n_j} \to \mu$ na top. fraca.

$$\mu_n = \frac{1}{s(n;\varepsilon)} \sum_{x \in E_n} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{T^i(x)}$$

<u>Afirmação</u>: $\mu \in M_T(X)$.

. Seja $f \in C^0(X;\mathbb{R})$

~~$\left|\int f\circ T\, d\mu - \int f\circ T\, d\mu\right| = \int f\circ T$~~

$\mu_{n_j} \to \mu$
$\Downarrow$ — não
$T_* \mu_{n_j} \to T_*\mu$

$$\left|\int f\circ T\, d\mu - \int f\, d\mu\right| =$$

$$\cancel{= \lim_{j\to\infty}\left|\frac{1}{n_j}\int \sum_{i=0}^{n_j-1}(f\circ T - f)\, d(T_*^i \sigma_{n_j})\right|}$$

usamos a cont do T

$$= \lim_{j\to\infty}\left|\int f\circ T\, d\mu_{n_j} - \int f\, d\mu_j\right|$$

$$= \lim_{j\to\infty}\left|\frac{1}{n_j}\int \sum_{i=0}^{n_j-1}(f\circ T - f)\, d(T_*^i \sigma_{n_j})\right|$$

$$= \lim_{j\to\infty}\left|\frac{1}{n_j}\int \sum_{i=0}^{n_j-1}\left(f\circ T^{i+1} - f\circ T^i\right) d\sigma_{n_j}\right|$$

$$= \lim_{j\to\infty}\left|\frac{1}{n_j}\int \left(f\circ T^{n_j} - f\right) d\sigma_{n_j}\right| \le \lim_{n_j\to\infty}\frac{2\|f\|}{n_j} = 0$$

$$\le \lim_{n_j\to\infty}\frac{2\|f\|}{n_j} = 0$$

Obs

$$\pi(n;\varepsilon) \leq s(n;\varepsilon) \leq \pi(n;\varepsilon/2)$$

Prova se E é um subconjunto $(n;\varepsilon)$ separado de cardinalidade maxima então E é um conjunto $(n;\varepsilon)$ gerador para T.

Para provar a 2ª desigualdade,

Seja E um conj. $(n;\varepsilon)$-separado e contrel. a + F um $(n;\frac{\varepsilon}{2})$ - gerador

definir $\phi: E \longrightarrow F$, $x \longrightarrow \phi(x)$ escolhido de modo que $d(x,\phi(x)) \leq \varepsilon/2$

ϕ é injetiva pois se $\phi(x)=\phi(y)$ então

$$d(x,y) \leq d(x,\phi(x)) + d(y,\phi(x)) \leq \varepsilon$$

contrario a que $d(x,y) > \varepsilon$.

$$h_{top}(T) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} s(n,\varepsilon) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n\to\infty} \pi(n;\varepsilon)$$

Obs: Seja $T: X \to X$ uma ~~aplicação~~ aplicacion contínua de um espaço metrico compacto.

Seja $\mu, m \in M_T(X)$ & $p \in [0,1]$

~~então~~ e $\mathcal{P}$ partição finita medible de $(X, \mathcal{A})$

Onde $\mathcal{A}$ boraleana. $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots P_n\}$

$P_i \in \mathcal{A}$ e $P_i \cap P_j = \emptyset$ se $i \neq j$

$\cup P_i = X$

Para el futuro

Então

1) $H_{p\mu + (1-p)m}(\mathcal{P}) \geq p H_\mu(\mathcal{P}) + (1-p) H_m(\mathcal{P})$

2) $h_{p\mu + (1-p)m}(T) = p\, h_\mu(T) + (1-p) h_m(T)$

Prova Peter Walter p. 183 ~~184~~ -184

~~$(X, \mathcal{A}, \mu)$ espaço metric compacto~~

Def.- Um subconjunto E de ~~X~~ é dito ser (n, ε)-separado com relação a T se

$(T: X \to X)$ homf. $x, y \in E$, $x \neq y \Rightarrow d_n(x, y) > \varepsilon$

Def $s(n; \varepsilon)$ denota a maior cardinalidade de um conjunto (n, ε)-separado

Precisamos comparar $H_{\mu_{n_j}}$ e H_μ, ou seja $\mu_{n_j}(A)$ e $\mu(A)$, A = boreleano, o que nem sempre é possível. O Lema a seguir facilita esta comparação

<u>Lema 1.-</u> Seja (X,d) = espaço métrico compacto e $\nu \in M(X)$.

(a) Se $x \in X$ e $\delta > 0$, $\exists\ \delta'_x < \delta$ $(\delta'_x \cong \delta)$ tq. $\nu(\partial B(x,\delta'_x)) = 0$

(b) Se $\delta > 0$ $\exists\ \alpha = \{A_1, \ldots, A_k\}$ partição finita de X com $\text{diam}\, A_j < \delta$ e $\nu(\partial A_j) = 0$ $\forall j = 1, \ldots k$. ▨

Usando o Lema seja $\alpha = \{A_1 \ldots A_k\}$ partição de X com $\text{diam}(\alpha) < \varepsilon$ (ε do início da prova). e $\mu(\partial A_i) = 0$.

Então $H_{\sigma_n}\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right) = \log s_n(\varepsilon; X)$

(o máximo possível)

já que nenhum elemento de $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha$ pode conter mais de um elemento de E_n, logo $s_n(\varepsilon,x)$ elementos de $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha$ têm σ_n- medida $\dfrac{1}{s_n(\varepsilon,x)}$ e os outros σ_n- medida zero.

Para relacionarmos H_{μ_n} e H_μ fixemos $m \geq 1$, $n \geq m$
$n = dm + r$, com $0 \leq r < m$, $d > 0$

e para $q = 0, 1, \dots, m-1$

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha = \bigvee_{i=0}^{dm+r-1} T^{-i}\alpha$$

$$= \left[\bigvee_{j=0}^{d-1} T^{-jm}\left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\alpha\right)\right] \vee \left[\bigvee_{i=dm}^{dm+r-1} T^{-i}\alpha\right]$$

$$\leq \left[\bigvee_{j=0}^{d-1} T^{-jm-q} \left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i} \alpha \right) \right] \vee$$

$$\vee \left[\left(\bigvee_{i=dm}^{dm+r-1} T^{-i} \alpha \right) \vee \left(\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i} \alpha \right) \right]$$

Observe que esta parte tem no max que

$$(\text{card}\, \alpha)^{r} \times (\text{card}\, \alpha)^{q} \leq (\text{card}\, \alpha)^{2m}$$

atomos. Logo

Segue assim

~~Lema 1~~

$$H_{\sigma_n}\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \alpha \right) \leq \sum_{j=0}^{d-1} H_{\sigma_n}\left(T^{-jm-q} \left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i} \alpha \right) \right)$$

$$+ H_{\sigma_n}\left(\left(\bigvee_{i=dm}^{dm+r-1} T^{-i} \alpha \right) \vee \left(\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i} \alpha \right) \right)$$

Lema 2

$$H_{\sigma_n}\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \alpha \right) \leq \sum_{j=0}^{d-1} H_{\sigma_n}\left(T^{-jm-q} \left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i} \alpha \right) \right)$$

$$+ 2m \log (\text{card}\, \alpha)$$

Lema 3. Se $\phi(x) = x\log x$ e $A \in \bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\alpha$,

$$\phi(\mu_{n_j}(A)) = \phi\left(\frac{1}{n_j}\sum_{l=0}^{n_j-1}\sigma_{n_j}(T^{-l}A)\right)$$

$$\boxed{\phi(\mu_n(A)) \geq \frac{1}{n_j}\sum_{l=0}^{n_j-1}\phi\left(\sigma_{n_j}(T^{-l}A)\right)}$$

Assim. Usando, Lema 2 e somando em A (no Lema 3)

~~Lema 4~~ ~~Pelo Lema 3.~~

$$H_{\mu_{n_j}}\left(\bigvee_{i=0}^{m-1}T^{-i}\alpha\right) \geq \frac{1}{n_j}\sum_{l=0}^{n_j-1} H_{\sigma_{n_j}}\left(T^{-l}\bigvee_{i=0}^{m-1}T^{-i}\alpha\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{n_j}\sum_{q=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{d-1} H_{\sigma_{n_j}}\left(T^{-jm-q}\bigvee_{i=0}^{m-1}T^{-i}\alpha\right)$$

$$\geq \frac{1}{n_j}\sum_{q=0}^{m-1}\left\{\left(H_{\sigma_{n_j}}\left(\bigvee_{i=0}^{n_j-1}T^{-i}\alpha\right)\right) - 2m\log(\operatorname{card}\alpha)\right\} \quad (\text{Lema } 2)$$

$$= \frac{m}{n} H_{\sigma_n}\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\alpha\right) - \frac{2m^2}{n}\log(\operatorname{card}\alpha)$$

$$= \frac{m}{n}\log s(n;\varepsilon) - \frac{2m^2}{n}\log(\operatorname{card}(\alpha))$$

$\mathcal{A} = \{A_1, \dots A_k\}$

Dado $\delta > 0$, como μ é regular

para todo $i = 1 \dots k$

existem compactos $B_i \subset A_i$ tais que

$$\mu(A_i \setminus B_i) < \delta$$

$$\mu(B_0) < \delta$$

onde $B_0 = X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B_i$

Seja $b = \min \{\delta, \underset{\substack{i \neq j \\ i \neq 0 \\ j \neq 0}}{\mathrm{dist}} (B_i, B_j)\}$

existe partición finita de $(X, \mathcal{B})$

conjuntos $\{C_1, \dots C_\ell\}$ tais que

$\mathrm{diam}(C_i) \leq b/4$

Para $i = 1, \dots k$
Seja $Q_i =$ a união dos C_i que intercepta B_i

Portanto $Q_i \supset B_i$, $Q_i \cap B_j = \phi$ se $i \neq j$

$$Q_i \cap Q_j = \phi \quad \text{se } i \neq j$$

Seja $Q_0 = X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} Q_i$

6

$Q_0 \subset B_0$, $Q_i \subset B_i \cup B_0$

$\Rightarrow \mu(Q_0) < \delta$

$$
\begin{aligned}
\mu(A_i \Delta Q_i) &= \mu(A_i \setminus Q_i) + \mu(Q_i \setminus A_i) \\
&\leq \mu(A_i \setminus B_i) + \mu(B_i \cup B_0 \setminus A_i) \\
&\leq \mu(A_i \setminus B_i) + \mu(B_0) \\
&\leq \mu(A_i \setminus B_i) + \mu(B_0) \\
&\leq 2\delta
\end{aligned}
$$

Se δ é pequeno

$\Rightarrow H(\mathcal{A}/\mathcal{Q}) < \varepsilon$. Com $\mathcal{Q} \leq \mathcal{B}$

$\varepsilon > H(\mathcal{A}/\mathcal{Q}) \geq H(\mathcal{A}/\mathcal{B})$

$$\frac{1}{n} H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{B}\right) \leq \frac{\log \# \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{B}\right)}{n} \leq \frac{\log S(n; \varepsilon)}{n}$$

$\downarrow$

$$h_\mu(T, \mathcal{B}) \leq \limsup_{n \to \infty} \frac{\log S(n, \varepsilon)}{n} \leq h(T)$$

$$
\begin{aligned}
h_\mu(T, \mathcal{A}) &\leq h_\mu(T, \mathcal{B}) + H(\mathcal{A}/\mathcal{B}) \\
&\leq h(T) + \varepsilon
\end{aligned}
$$

Lema 4

$$H_{\mu_n}\left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\mathcal{Q}\right) \geq \frac{m}{n}\log \cancel{S}(n;\varepsilon) - \frac{2m^2}{n}\log \operatorname{Card}(\mathcal{Q})$$

$$\geq \frac{m}{n}\log S(n;\varepsilon) - \frac{2m^2}{n}\log\left(\operatorname{Card}(\mathcal{Q})\right).$$

Lema 5.- $H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\mathcal{Q}\right) \geq m\, S(\varepsilon)$ $\begin{pmatrix} m \\ \text{fixo}\end{pmatrix}$

onde $S(\varepsilon) = \limsup \frac{1}{n}\log S(n;\varepsilon)$.

De fato: ~~fixar m~~ trocamos n por n_j no Lema 4 e como $\mu_{n_j} \to \mu$ e $\cancel{\mu}(\partial\mathcal{Q}) = 0$ temos que

$$H_{\mu_{n_j}}\left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\mathcal{Q}\right) \xrightarrow[n_j]{} H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\mathcal{Q}\right)$$

~~Observe que~~ Observe que T preserva μ $\Rightarrow$

~~$\mu(\partial\mathcal{Q}$~~ $\mu\left(\partial\left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\mathcal{Q}\right)\right) = 0$

e $\mu(\partial\mathcal{Q}) = 0 \Rightarrow$ $\quad \subset \partial\left(\bigcup_{i=0}^{m-1} T^{-i}\partial\mathcal{Q}\right)$

Usando Lema 4 temos

$$H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\alpha\right) \geq m\, s(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{m} H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\alpha\right) \geq s(\varepsilon)$$

fazendo $m \to \infty$ tem

$$h_\mu(T) \geq h_\mu(T, \alpha) \geq s(\varepsilon)$$

fazendo $\varepsilon \to 0$ (o que requere tomar diferentes α's)

tem
$$h_\mu(T) \geq h_{top}(T)$$