Def. – $\Omega(T) = \{ x \mid \forall$ viz V de x $\exists n \geq 1$ t.q. $T^n V \cap V \neq \phi \}$

$X \setminus \Omega(T)$ é aberto pois $x \in X \setminus \Omega(T)$

$\Rightarrow \exists$ viz aberta $V \ni x$ tq ~~$\forall n \geq 1$~~

$$V \cap \left(\bigcup_{n \geq 1} T^n V \right) = \phi$$

$\Rightarrow V \subset X \setminus \Omega(T)$

Assim $\Omega(T)$ é fechado. (em particular mensurável) (Borelianos)

~~Observação~~ ~~Corolário~~. – X = esp. top. base numerável de abertos

$T: X \to X$ preserva μ prob.

$\Rightarrow \mu(\Omega(T)) = 1$ • 2

Colocado como motivação:

Propriedade de $\Omega(T)$: 1) $\Omega(T)$ é fechado

2) $x \in \cancel{X \setminus} \Omega(T) \Rightarrow$

$\exists V \ni x$ viz ab. tq $V, T^{-1}V, \dots, T^{-n}V$ são disj. deixados

V $T^{-n}(V)$ $T^n(y) \in V \cap T^n(V)$)

(caso contrário

$$X \setminus \Omega(X) = \bigcup_{j \geq 1} V_j$$

tq. ~~...~~ $\forall j$

$V_j, T^{-1}V_j, \ldots, T^{-n}V_j$ são disjunt.

Com $\mu(V_j) = \mu(T^{-1}V_j) = \ldots = \mu(T^{-n}V_j)$

$\Rightarrow \mu(V_j) = 0 \Rightarrow \mu(X \setminus \Omega(X)) = 0$

<u>Corolário 1</u> Se μ é positiva sobre abertos $(\neq \emptyset)$.

$\Rightarrow \Omega(T) = X$

Se $\underbrace{X \setminus \Omega \neq \emptyset}_{\text{aberto}}$ então $\mu(X \setminus \Omega) \overset{\text{seria}}{>} 0$

<u>Corolário 2</u>. Se $\operatorname{supp} \mu = \{x \mid \forall$ viz ab. V de x $\mu(V) > 0\}$

então $\operatorname{supp} \mu \subset \overline{Rec(T)}$.

aberto $X \setminus \overline{Rec(T)}$ que é viz de cada um dos seus pontos.

com $\mu(X \setminus \overline{Rec(T)}) = 0 \Rightarrow X \setminus \overline{Rec(T)} = \emptyset$

<u>Def</u>.. $T : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (Y, \mathcal{B}, \nu)$

bijeção <u>bimensurável</u> se

1) T é bijetiva
2) T, T^{-1} são mensuráveis
3) T preserva medida $\quad \mu(T^{-1}(B)) = \nu(B)$ $\forall B \in \mathcal{B}$

$\Downarrow$

T^{-1} preserva medida:

$A \in \mathcal{A}$

$$\nu((T^{-1})^{-1}(A)) = \nu(TA)$$
$$= \mu(T^{-1}TA) = \mu(A)$$

As bijeções bimensuráveis são os isomorfismos de estrutura.

Difeomorfismos e campos que preservam Volume ⑧

$\mathbb{R}^n$ espaço vetorial

ω_1, ω_2 n-formas lineares alternadas em E

Difeos e campos que preservam volume

8

$\mathbb{R}^n$ n-forma linear alternada canônica

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$dx_i(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n) = a_i$$

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n (V_1, \dots, V_n)$$

$$\det \left(dx_i(V_j) \right)$$

fila   coluna

ω n-forma linear alternada ~~não de~~
então

$$\omega = \lambda \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

se $\lambda \neq 0$ ω é não degenerada.

Espaço vetorial n-forma lin alternada de $\mathbb{R}^n$ tem dimensão 1

$$L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{linear}$$

ω n-forma

$$(L^* \omega)(V_1, \dots V_n) = \omega(LV_1, \dots LV_n)$$

$$L^* \omega = \det L \, \omega$$

em particular   toda n-forma é $L^* dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

E_1, E_2 espaços vetoriais n-dimensionais (9)

$L: E_1 \longrightarrow E_2$ linear

ω_2 forma n-linear alternada em E_2

$$(L^* \omega_2)(v_1, \dots v_n) = \omega_2 (Lv_1 \dots L v_n)$$

ω_1 forma n-linear alternada em E_1
e não degenerada

definimos $\det(L)$ pela relação

$$L^* \omega_2 = (\det L)\, \omega_1$$

$\det L$ com relação a (ω_1, ω_2)

~~Seja agora $f: M \to C^1$~~

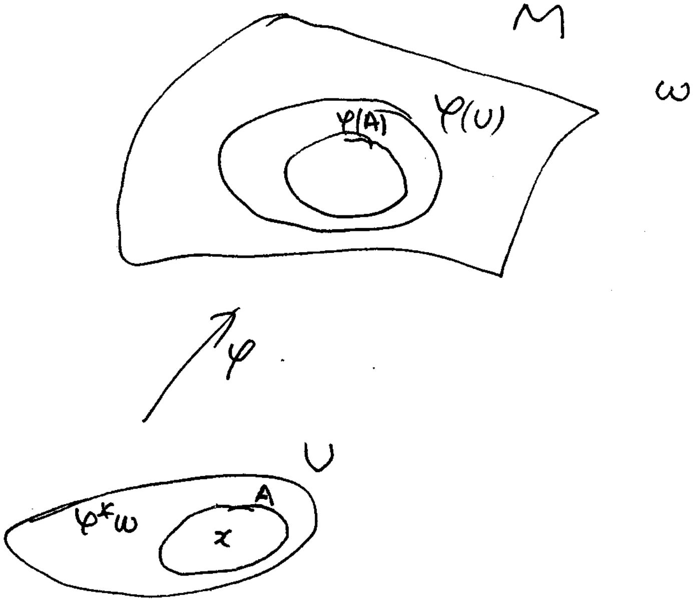
~~ω~~

M variedade n-dim. C^∞ sem bordo
orientada.

ω uma forma de volume: isto é:

$p \in M \qquad \omega_p : TM_p \times \dots \times TM_p \longmapsto \mathbb{R}$

forma n-linear alternada e $\omega_p(v_1, \dots v_n) > 0$ se
$(v_1 \dots v_n)$ é uma base positiva



$$(\varphi^*\omega)_x(v_1,\dots v_n) = \omega_{\varphi(x)}(D\varphi_x v_1 \dots D\varphi_x v_n)$$

$$\parallel$$

$$f(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$\mu_\omega(\varphi(A)) \int_{\varphi(A)} \omega = \int_A \varphi^*\omega = \int_A f\, d\lambda$$

$$f(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \, (e_1,\dots e_n) = (\varphi^*\omega)_x(e_1,\dots e_n)$$

$$f(x) = \omega_{\varphi(x)}(D\varphi_x e_1, \dots D\varphi_x e_n)$$

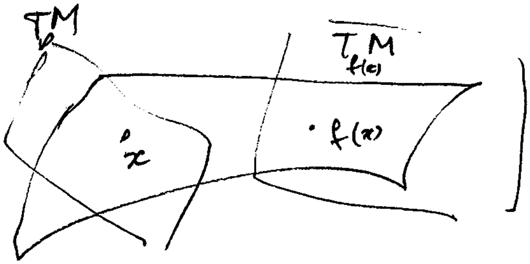
Todos os medidas $\mathcal{H}_\omega$ são equivalentes

Se $(M, \langle , \rangle)$ varied. Rieman.

$dV_p(e_1, \dots e_n) = 1$ forma de volume ass. a $\langle , \rangle$. (é única)

$\{e_1 \dots e_n\}$ base ortonormal positiva de T_pM

$f : M \xrightarrow{C^1} M$ ω forma de volume sobre M



$(f^*\omega)_x$: ~~D_xf~~ ω_x

$$\boxed{(f^*\omega)_x = \underset{\uparrow}{\varphi} \cdot \omega_x}$$

$\det_\omega (D_x f)$ por definição

$$\boxed{(f^*\omega)_x = (D_xf)^* \omega_{f(x)}}$$

$$\boxed{(f^*\omega)_x = \det_\omega(D_x f)\,\omega_x}$$

$A \subset M$ é boreliano

$$\mu_\omega(f(A)) = \int_{f(A)} \omega =$$

$$= \int_A f^*\omega = \mu_{f^*\omega}(A)$$

<u>f é difeo</u> ~~$\det_\omega(D_x f) = 1$~~

~~μ_ω é f-invariante $\mu_\omega(fA) = \mu_\omega(A)$~~

1) $|\det_\omega(D_x f)| = 1$, $\forall x \in M$ e f preserva orientação

$\Leftrightarrow$ $(f^*\omega)_x = \omega_x$ $\Rightarrow$ (f preserva μ_ω)

$\Rightarrow$ $\mu_\omega(f(A)) = \mu_{f^*\omega}(A) = \mu_\omega(A)$

$\Rightarrow$ f^{-1} preserva μ.

2) f^{-1} preserva μ e $\det_\omega(D_{x_0} f) > 1$

$(\neq 1)$

$\exists$ viz V ~~aberta~~ K compacta de x_0

tal que $\det_\omega (D_x f) \geq 1+\varepsilon \qquad \varepsilon > 0$

$\forall x \in U$

e $\int_K \omega = \mu_\omega(K) > 0$

então

$$\mu_\omega(f(K)) = \int_{f(K)} \omega = \int_K f^* \omega \geq (1+\varepsilon) \int_K \omega$$

$$= (1+\varepsilon)\, \mu_\omega(K)$$

$\Rightarrow \Leftarrow$

<u>Def</u>.- Um fluxo C^r numa v. M é um par (D, φ) onde $D \subset \mathbb{R} \times M$ aberto e $\varphi : D \xrightarrow{C^r} M$ tq.

ⓐ $\forall x \in M$, $\mathbb{R} \times \{x\} \cap D = (\underset{\vee}{\tau^-(x)}, \tau^+(x)) \times \{x\}$ ... 0

ⓑ $\varphi(t+s, x) = \varphi(s, \varphi(t,x))$ onde tiver sentido

ⓒ Se $\tau^+(x) < \infty$ $\forall$ compacto $K \subset M$ $\exists\, T < \tau^+(x)$ tq $\varphi(t,x) \notin K$, $\forall t \in [T, \tau^+(x))$

Teor: Se X é um campo C^r em M

$\exists$ um único fluxo C^r (D, φ) em M
$\varphi : D \to M$

tq

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) = X(\varphi(t, x))$$

Definição Sejam X campo e ω n-forma forma de volume em $M \in C^r$

$i_X \omega$ $(n-1)$-forma definida p

$$i_X \omega(v_1, \dots v_{n-1}) = \omega_p(X(p), v_1, \dots v_{n-1})$$

Divergência de X é a função C^{r-1}

$$\mathrm{div}_\omega X : M \to \mathbb{R}$$

dada por

$$\boxed{d(i_X \omega) = (\mathrm{div}_\omega X)\, \omega}$$

Teorema:

<u>Teorema</u>: (Formula de Liouville). Sejam

X, ω, M — var. dif C^r orientada

X campo vet. em M, ω n-forma de volume

~~(D,φ)~~ $\varphi : D \subset \mathbb{R}\times M \to M$ fluxo gerado por X

então

$$\det_\omega (D_x \varphi_t) = \exp \int_0^t (\mathrm{div}_\omega X)(\varphi_s(x))\, ds$$

para todo $T>0$, $x \in D_T$ e $|t|<T$.

<u>Prova</u> (apenas em classe C^2)

Derivada de Lie $L_X \omega$ de ω com respeito a X.

$$(L_X \omega)_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left((D_p \varphi_t)^* \omega_{\varphi_t(p)} - \omega_p \right)$$

Fato que este limite existe (quando ω e $X \in C^2$) e que

$$\boxed{\begin{array}{l} L_X(\omega) = d(i_X\omega) + i_X(d\omega) \\ \cancel{d(i_X\omega) = L_X\omega + i_X(d\omega)} \end{array}}$$

ω n-forma $\Rightarrow d\omega = 0$ ($(n+1)$-forma em M^n)

$$\boxed{d(i_X\omega) = L_X\omega.}$$