Aula # 11

<u>Teorema</u>: Seja $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ esp. de prob. onde

X = espaço top. com base enumerável

$\mathfrak{A}$ = borelianos.

Suponha μ é positiva sobre abertos $(\neq \emptyset)$

e que $T: X \to X$ é ~~transformação contínua~~ mensurável e ~~erg~~-ergódica.

Então T é transitiva (tem órbitas densas)

<u>Prova</u>: Seja $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma base enumerável de abertos $(\neq \emptyset)$.

$$A_i = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(U_i)$$

tem medida positiva e é T-invariante

$(T^{-1}(A_i) \subset A_i$ & $\mu(T^{-1}(A_i)) = \mu(A_i) \Rightarrow T^{-1}(A_i) = A_i \mod 0)$.

Pela ergodicidade de T, $\mu(A_i) = 1$.

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(U_i)\right) = 1 \text{ (tem } \mu\text{-medida } 1)$$

$$x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(U_i)$$

quer dizer que dado i $\exists\, n_i \geq 0$ tal que $T^{n_i}(x) \in U_i$

$\Rightarrow$ órbita positiva de x é densa $\Rightarrow \omega(x) = X$.

Obs1 se X é de Baire

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(A_i) \text{ é residual.}$$

Obs 2 O recíproco do Teor é falso:

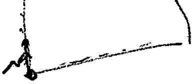
Exemplo de Furstenberg: (T^2 é minimal)

Existe difeo C^∞ em T^2 ~~transitivo~~ minimal preservando a medida de Lebesgue positiva em abertos mas não ergódica

$$T^2 = S^1 \times S^1$$

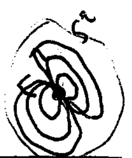
$$T(x,y) = \left(x e^{2\pi i \alpha}, y e^{2\pi i \varphi(x)}\right)$$

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$



$$T(1,1) = \left(e^{2\pi i \alpha}, e^{2\pi i \varphi(1)}\right)$$

$$T^2(1,1) = \left(e^{4\pi i \alpha}, e^{2\pi i \varphi(1)} \cdot e^{2\pi i \varphi(2\pi i \alpha)}\right.$$



(não tem ptos. periódicos)

Obs: T minimal $\Longrightarrow$ T transitiva

$\not\Longleftarrow$ (Anosov. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ em T^2

T unic. ergódica sem ptos periódicos $\not\Rightarrow$ T transitiva (Ex. de Denjoy

~~Def~~ $\begin{cases} X = \text{espaço métrico de Baire com base enumerável} \\ \mathcal{Q} = \text{boreleanos} \\ \mu = \text{prob.} \end{cases}$ $(X, \mathcal{Q}, \mu)$

Def: $T: X \to X$ contínua é transitiva se

$\exists\, x \in X$ tq $\omega(x) = X$

Proposicion 1- $T: X \to X$ cont. son equiv.

ⓐ T transitiva

ⓑ $\exists$ subconjunto residual $U \subset X$ tq $x \in U$ $\Rightarrow \omega(x) = X$

ⓒ Para todo aberto $U \subset X$ o conjunto $\bigcup_{n \geq 1} T^{-n}(U)$ é denso em X

Prova

ⓐ $\Rightarrow$ ⓒ Seja $U \subset X$ aberto

$y \in Y$

$x \in X$ tq $\omega(x) = X$

Como $y \in \omega(x) \Rightarrow \forall$ viz V de y

$\exists\, n > 0$ tq $T^n(x) \in V$. Como $\omega(x) = X$

$\exists\, m > n$ tq $T^m(x) \in U \Rightarrow$

(*) $T^{-(m-n)}(U) \supset T^{-(m-n)}(\{T^{m}(x)\}) \supset \{T^{n}(x)\}$

pois $T^{m-n}(T^{n}x) = T^{m}x$

Então $T^{-(m-n)}(U)$ intercepta V.

Como V é arbitrário

$$y \in \overline{\bigcup_{j>0} T^{-j}(U)}$$

(c) $\Rightarrow$ (b)

Seja $\{U_n : n \in \mathbb{Z}\}$ base enumerável de abertos de X. Como para cada n

$$S_n = \bigcup_{j\geq 1} T^{-j}(U_n) \quad \left(= \bigcup_{j\geq 0} T^{-j}(T^{-1}(U_n)) \right)$$

é aberto e denso,

$$S = \bigcap_n S_n \quad \text{é residual}$$

Af: Se $x \in S$ então $\omega(x) = X$

De fato, dado U_n

provem que $\exists\, m \geq 1$ tq $T^m x \in U_n$.

$x \in S \Rightarrow x \in S_n \Rightarrow \exists\, m \geq 1$

tq $T^m(x) \in U_n$

Como U_n é base ...

b $\Rightarrow$ a trivial

<u>Corolário</u>.- Um homeomorfismo T de um espaço de Baire é transitivo $\Leftrightarrow$ T^{-1} é transitivo

<u>Prova</u> T^{-1} satisfaz c

$\bigcup_{j \geq 0} T^j(U)$ é denso. $\forall$ aberto $U \subset X$

Se $\omega(x) = X$ segue que $\exists\, m > 0$ tq

$T^m(x) \in U$. De modo que

$$\overline{\bigcup_{j \geq 0} T^j(U)} \supset \overline{\bigcup_{j \geq 0} T^j(T^m x)} \supset \omega(T^m x) = \omega(x) = X.$$

"Mixing" e fracamente "mixing".

Lembremos que uma t.p.m. $\mathcal{Q}$-μ $T: X \to X$

$X = (X, \mathcal{Q}, \mu)$

é ergodica $\Rightarrow$

1. $$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu\left(T^{-j}(A) \cap B\right) \to \mu(A)\,\mu(B)$$

$\forall A, B \in \mathcal{Q}$

Def: T ~~es~~ fracamente mixing se

2. $$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left|\mu\left(T^{-j}(A) \cap B\right) - \mu(A)\,\mu(B)\right| \to 0$$

$\forall, B \in \mathcal{Q}$

Def T é (fortemente) mixing se

$$\lim_{j \to \infty} \mu\left(T^{-j}(A) \cap B\right) = \mu(A) \cdot \mu(B)$$

obs:

~~[illegible]~~

mixing $\Rightarrow$ fracamente mixing $\Rightarrow$ ergodica

mixing $\not\Leftarrow$ fracamente mixing $\not\Leftarrow$ ergodica

Obs: As rotaciones irracionais de S^1 son unie. ergodicas. Pero no ~~son~~ son fracamente mixing.

Exercic.

Definición.- Dado espaço top. X.

$T: X \to X$ és top. mixing se

$\forall\, U, V$ abiertos $\neq \emptyset$ $\exists\, N$ tq

$\forall\, n \geq N$ $\quad T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$

Teorema: Seja X espaço topológico e $T: X \circlearrowleft$ mensurável que preserva uma probabilidade μ sobre os borelianos de X. Se T é mixing e μ é positiva sobre abertos $\neq \emptyset$, então T é top. mixing.

Prova.- Sejam U e V abertos $\neq \emptyset$.

Como T é mixing

$$\lim_n \mu(T^{-n}U \cap V) = \mu(U)\cdot\mu(V) > 0$$

$\Rightarrow$ $\exists N>0$ tq $\mu(T^{-n}U \cap V) > 0$ $\quad \forall\, n \geq N$ ~~suf. grande [illegible]~~

$\Rightarrow$ $T^{-n}U \cap V \neq \emptyset$ $\quad \forall\, n \geq N$.

Teorema Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ esp. de prob.

Seja $\mathcal{A}_0$ algebra que gera $\mathcal{A}$ (ou semi-algebra)

Então

1. T é ergódica $\Leftrightarrow$ $\forall A, B \in \mathcal{A}_0$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(T^{-i}A \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$$

2. T é frac. mixing $\Leftrightarrow$ $\forall A, B \in \mathcal{A}_0$

$$\lim_n \sum_{i=0}^{n-1} |\mu(T^{-i}A \cap B) - \mu(A) \cdot \mu(B)| = 0$$

3. T é fortemente mixing $\Leftrightarrow$ $\forall A, B \in \mathcal{A}_0$

$$\lim_n \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$$

Ideia da prova $A_0, B_0 \in \mathcal{A}_0$, $A, B \in \mathcal{A}$

$$(T^{-i}A \cap B) \Delta (T^{-i}A_0 \cap B_0)$$

$$\subset (T^{-i}A \Delta T^{-i}A_0) \cup (B \Delta B_0)$$

$$\mu(T^{-i}A \Delta T^{-i}A_0) = \mu(T^{-i}(A \Delta A_0)) = \mu(A \Delta A_0)$$

SHIFTS

$X = \{1, 2, \dots n\}$

$B(n) = X^{\mathbb{Z}}$ $\qquad$ $B^+(n) = X^{\mathbb{Z}^+}$

shift: $\sigma : B(n) \to B(n)$

$\qquad \theta \to \sigma(\theta)$

$\sigma(\theta)(j) = \theta(j+1)$.

σ = shift

1. $B(n)$ com a topologia produto

   X com a " discreta

Obs1 $B(n)$ é metrizável d

$$d(\theta, \tilde{\theta}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|j|}} |\theta(j) - \tilde{\theta}(j)|$$

Obs2 σ é contínua ~~mas não injectiva~~ é injectiva

$\sigma : B(n) \to B(n)$

$\sigma : B^+(n) \to B^+(n)$ é contínua mas não injectiva

Obs 3 Os cilindros (elementares) ~~...~~ são base para topologia (2)

$$C(j;k_0,k_1,\dots k_m) = \{\theta \mid \theta(j+i) = k_i,\ i=0,\dots m\}$$

Obs 4

$$C(j,k_0,k_1\dots,k_m)^c = \bigcup_{k_i' \neq k_i} C(j;k_0',\dots,k_m')$$

Assim os cilindros são ~~abertos~~ e fechados

Logo $B(n)$ é totalmente desconexo

Construção de medidas invariante por σ em $B(n)$

1) Defino $\mu(C(0;k_0)) = p_0(k_0)$ sendo $p_0 : X \longmapsto [0,1]$

$$\sum_{k_0=1}^{n} p_0(k_0) = 1$$

2) Def. $\mu(C(0;k_0,k_1)) = p_1(k_0,k_1)$

$p_1 : X \times X \to [0,1]$

$$\sum_{k=1}^{n} p_1(k_0,k) = p_0(k_0)$$

3) Def. por indução

$\mu(C(0,k_0,k_1\dots,k_{m+1})) = p_{m+1}(k_0,\dots k_{m+1})$

sendo $\sum_{k=1}^{n} p_{m+1}(k_0,\dots k_m,k) = p_m(k_0,\dots k_m)$

$p_m : \underbrace{X \times \dots \times X}_{m+1\text{ vez}} \longmapsto [0,1]$

$$C(0;k_0,\dots,k_{p+q})^c = \biguplus_{k_i' \neq k_i} C(0;k_0',\dots,k_{p+q}')$$

é aberto (Todo cilindro é aberto e fechado. $B(n)$ é totalmente desconexo)

$$\mu(C(j;k_0,\dots,k_{p+q})) \overset{\text{Def.}}{=} \mu(0;k_0,\dots,k_{p+q})$$

$$(-C(j_1;k_0\dots k_{p+q}) \cap C(j_2;k_0',\dots k_{p+q}')$$

é união de cilindros ~~disjuntos~~ elementares

defini $\mu(C)$ aditivamente

~~Exe.1~~ Obs: este é a construção mais geral possível de medidas invariantes por σ.

Exemplo ... medida produto ($(B(X),\mu)$ é shift de Bernoulli)

$$\mu(C(j;k_0,\dots k_m)) = \mu_0(k_0)\dots\mu_0(k_m)$$

$\mu_0 \in M(X)$

$\mu \in M(B(n))$

$X = \{1\dots n\}$

Obs $C_1 = C(j; k_0 \dots k_m)$ $\quad j' > j+m$ (4')

$C_2 = C(j'; k_0', \dots k_{m'}')$

$\Rightarrow \mu(C_1)\cdot\mu(C_2) = \mu(C_1)\cdot\mu(C_2)$.

"é independência de acontecimentos"

Ex. 2 Medidas de Markov

① vetor probabilidade $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$

matriz estocástica $\underset{n\times n}{P} = (p_{ij})_{i,j \in X}$

- $p_{ij} \geq 0$
- $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$

tq $\sum_{i=1}^{n} p_i p_{ij} = p_j$

$pP = p$

Defini $\mu_m(k_0, \dots, k_m) = p_{k_0} p_{k_0 k_1} \cdots p_{k_{m-1} k_m}$

$\sum_{k=1}^{m} p_{k_0} \cdot p_{k_0 k_1} \cdots p_{k_{m-1} k_m} = p_{k_0} p_{k_0 k_1} \cdots p_{k_{m-2} k_{m-1}}$

B

Se $g \in \mathcal{D}$ e $x \in M \cap \left(\bigcup_{\substack{P \in \mathcal{P}_n \\ n \geq 1}} \partial P \right)$

definimos

$$\nu_{g,n}(x) = \# \{ P \in \mathcal{P}_n \;/\; g(\mathcal{P}_n(x)) \cap P \neq \emptyset \}$$

$$\nu_g(x) = \limsup_{n \to \infty} \nu_{g,n}(x)$$

<u>Lema 12.1.</u>- Seja $Q_0 = \underbrace{[-1,1] \times \dots \times [-1,1]}_{l \text{ vezes}}$.

Para todo $g \in \mathcal{D}$ e $x \in M$ vale:

$$\nu_g(x) \leq \sup_y \# \{ P \in P_1 \;/\; y + (D_x g)(Q_0) \cap P \neq \emptyset \}$$

---

se $\quad C(g) = \sup_{x \in M} \| (D_x g) \|^l$

então $\quad \nu_g(x) \leq C(g) \quad$ qtp $x \in M$

<u>Prova</u>: Seja $\varphi_n : \mathbb{R}^\ell \circlearrowleft$ definida por $\varphi_n(y) = \frac{1}{n} y + x$ e $U_n = \varphi_n^{-1}(U)$

e seja $g_n : U_n \to g_n(U_n) \subset U_n$ tq o diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
U_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "\varphi_n"'] & U_n \arrow[d, "\varphi_n"] \\
U \arrow[r, "g"] & U
\end{tikzcd}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\det_\omega(D_x\varphi_t)\Big|_{t=t_0}\right)\omega_{\varphi_{t_0}(x)} =$$

$$(*) \quad = \left[\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\det_\omega(D_x\varphi_{t_0+h}) - \det_\omega(D_x\varphi_{t_0})\right)\right]\omega_{\varphi_{t_0}(x)} =$$

$$= \cancel{\left[\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\right.}$$

Pero $D_x\varphi_{t_0+h} = D_x\,\varphi_h\circ\varphi_{t_0}$

$$= (D_{\varphi_{t_0}(x)}\varphi_h)\circ(D_x\varphi_{t_0})$$

$$\det_\omega(D_x\varphi_{t_0+h}) = \det_\omega\left[(D_{\varphi_t(x)}\varphi_h)\cdot(D_x\varphi_{t_0})\right] =$$

$$= \det_\omega(D_{\varphi_{t_0}(x)}\varphi_h)\cdot\det_\omega(D_x\varphi_{t_0}) =$$

Luego

$$(*) \quad \cancel{= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[D_{\varphi_{t_0}(x)}\varphi_h\right.}$$

$$(*) \quad = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\left(\det(D_{\varphi_{t_0}(x)}\varphi_h) - 1\right)\right]\cdot\det_\omega(D_x\varphi_{t_0})\,\omega_{\varphi_{t_0}(x)} =$$

$$= \det_\omega(D_x\varphi_{t_0})\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\det(D_{\varphi_{t_0}(x)}\varphi_h)\cdot\omega_{\varphi_{t_0}(x)} - \omega_{\varphi_{t_0}(x)}\right]$$

$$- \cancel{\det_\omega(D_x\varphi}$$

~~Ent~~

$$= \det_\omega (D_x \varphi_{t_0}) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[(D_{\varphi_{t_0}(x)} \varphi_h)^* \omega_{\varphi_{t_0+h}(x)} - \omega_{\varphi_{t_0}(x)} \right]$$

$$= \det_\omega (D_x \varphi_{t_0}) \cdot (L_X \omega)_{\varphi_{t_0}(x)} =$$

$$= \det_\omega (D_x \varphi_{t_0}) \cdot d(i_X \omega)_{\varphi_{t_0}(x)}$$

$$= \det_\omega (D_x \varphi_{t_0}) \cdot \left[(\operatorname{div}_\omega X) \cdot (\varphi_{t_0}(x)) \right] \cdot \omega_{\varphi_{t_0}(x)}$$

$$= \det_\omega (D_x \varphi_{t_0}) \left[(\operatorname{div}_\omega X)(\varphi_{t_0}(x)) \right] \omega_{\varphi_{t_0}(x)}$$

isto é: a função

$$\psi(t) = \det_\omega (D_x \varphi_t)$$

satisfaz a eq. diferencial

$$\dot\psi(t) = (\operatorname{div}_\omega X)(\varphi_t(x))\,\psi(t)$$

com $\psi(0) = 1$ $\quad [D_x \varphi_0 = D_x \, Id]$

tem: $$\boxed{\psi(t) = \exp \int_0^t (\operatorname{div}_\omega X)(\varphi_s(x))\, ds}$$

Isso vale em classe C^1

<u>Def</u>.- $\varphi: D \subset \mathbb{R}\times M \xrightarrow{C^r} M$ M variedade.

fluxo. φ preserva μ (definida nos borelianos de M)

se $\forall\, t>0$ e todo boreliano $A \subset M$

$$\mu(\varphi_t(A)) = \mu(A) \quad \text{, onde tiver sentido}$$

$\forall\, x \in A$ $\varphi_t(x)$ está definido

tem sentido se

$\Leftrightarrow$ $t \in (\tau^-(x), \tau^+(x))$ $\forall\, x \in A$.

<u>Corolário</u>.- X campo C^1 em M = var. C^2

ω forma de volume em M

μ_ω é X-invariante $\overset{\text{Teor.}}{\Leftrightarrow}$ $\mathrm{div}_\omega X \equiv 0$

$\Updownarrow$ Def

ω é X-invariante