1

<u>Proposition</u>: ~~Let~~ If a translation $L_{g_0}$ on a compact, metrizable, ~~compact~~, abelian group $G$ is ergodic with respect to the Haar measure $\lambda_G$, then ~~$L_{g_0}$~~ it is uniquely ergodic.

<u>Proof</u>: Let $\mu$ be any $L_{g_0}$-invariant Borel probability ergodic measure. ~~Since~~

We have that

(1) For all $g \in G$, the measure $\mu_g$ defined by
$$\mu_g(A) = \mu(L_g(A))$$
is $L_{g_0}$ invariant.

In fact
$$\mu_g(L_{g_0}^{-1}(A)) = \mu_g(g_0^{-1}A) \overset{\text{abelian}}{=} \mu(g_0^{-1}gA) \overset{L_{g_0}\text{-invariance}}{=} \mu(gA) = \mu_g(A).$$

This proves (1).

As the set $M_{L_{g_0}}(G)$ is weak$^*$-compact and convex, we may define for any measurable set $E$, $\lambda_G(E)>0$, the following measure $\mu_E$:

$$\mu_E(A) := \frac{1}{\lambda_G(E)} \int_E \mu_g(A)\, d\lambda_G(g).$$

(2) If $E \cap F = \emptyset$,

$$\lambda_G(E \cup F) \cdot \mu_{E\cup F} = \lambda_G(E)\,\mu_E + \lambda_G(E)\,\mu_F$$

(3) $\mu_G$ is $L_g$-invariant for any $G$. $\not\Rightarrow$ $\mu_G = \lambda_G$

In fact

$$\mu_G(L_s A) = \int \mu_g(sA)\cdot d\lambda_G(g)$$

$$= \int \mu_{gs}(A)\cdot d\lambda_G(g) = \int \mu_{gs}(A)\cdot d((L_s)_*\lambda_G)(g)$$

$$= \int \mu_{gs}(A)\, d\lambda_G(v) = \mu_G(A) \quad //$$

(4) $\underline{\mu = \lambda_G}$.

In fact, otherwise (ie $\mu \neq \lambda_G$) ~~there~~ exists a continuous function $\varphi$ such that $\int_G \varphi d\mu \neq \int \varphi d\lambda_G$

Mas como $\mu_G = \lambda_G$ tem-se

$$\int \varphi d\lambda_G = \int_G \left( \int \varphi d\mu_g \right) d\lambda_G = \int_G \left( \int (\varphi \circ L_g) d\mu \right) d\lambda_G$$

$(\mu_g = (L_{g^{-1}})^* \mu = \mu \circ L_g$ não sim

A função $\bar{\varphi}_g = \int \varphi \circ L_g d\mu$

is continuous in $g$ ($\varphi$ é unif. contínua em $G$) and since we assumed.

$$\bar{\varphi}_{id} = \int_G \varphi d\mu = \text{constante} \neq \int \bar{\varphi}_g d\lambda_G$$

$\bar{\varphi}_g$ is not constant. Thus we can find a number $a$ such that

$\lambda_G(E) > 0$ and $\lambda_G(F) > 0$

$E = \{ g \mid \bar{\varphi}_g \geq a \}$, $F = G \setminus E$.

Therefore $\int \varphi \, d\mu_E \geq a > \int \varphi \, d\mu_F$.

$\Rightarrow \quad \mu_E \neq \mu_F$,

By $\lambda_G(E)\,\mu_E + \lambda_G(F)\,\mu_F = \mu_{E\cup F} = \mu_G = \lambda_G$

This $\Rightarrow$ $\lambda_G$ is not ergodic $\boxed{\Rightarrow \Leftarrow}$

# Extensões de Rotações

Seja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

<u>Proposição</u>: Considere o toro $T^2$, uma ~~função~~ $\varphi: S^1 \to \mathbb{R}$ e uma aplicação

$$f(x,y) \longmapsto (x+\alpha\,, y+\varphi(x))$$
$$T^2 \longrightarrow T^2$$

Se $\varphi(x) = \Phi(x+\alpha) - \Phi(x)$ para alguma função Lebesgue-mensurável $\Phi: S^1 \to \mathbb{R}$

Então para qq medida invariante ergódica $f$ é metricamente isomorfo a rotação $R_\alpha$ e há um conjunto não enumerável de medidas ~~ergódicas~~ ~~invariantes~~ invariantes ergódicas ~~mutuamente~~ ~~de~~

<u>Prova</u>: Seja ~~$h(x)$~~ $h(x,y) = (x, y + \Phi(x))$

Então $h^{-1}(x,y) = (x, y - \Phi(x))$

(1) $h^{-1} \circ f \circ h(x,y) = (x+\alpha, y)$

Como $h^{-1} \circ f \circ h(x,y)$ preserva circulos

$S^1 \times \{y\}$

$f$ preserva "circulos mensuráveis" que são grafico de $\Phi + c$, onde $c \in \mathbb{R}$. e assim podem colocar em cada grafico uma medida ergodica prestada da medida do "circulo" via $h$.

$$\begin{tikzcd} S^1 \times S^1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & S^1 \times S^1 \arrow[d, "\pi_1"] \\ S^1 \arrow[r, "(h^{-1} \circ f \circ h)|_{S^1}", "R_\alpha"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

Como $R_\alpha$ é unicamente ergódica qualquer medida ergódica para $f$ se projeta na medida de Lebesgue no círculo. Assim $h$ define um isomorfismo métrico para qq. tal medida.

# Idea da Prova do Ex. de Furstenberg

**Proposição 1:** Consideremos o toro $T^2$, a função $\varphi: S^1 \to \mathbb{R}$ e uma aplicação

$$f: (x,y) \mapsto (x+\alpha, y+\varphi(x)) \text{ de } T^2.$$

Então ou $\varphi(x) = \Phi(x+\alpha) - \Phi(x) + \gamma$ para alguma função contínua $\Phi: S^1 \to \mathbb{R}$ e $\gamma \in \mathbb{Q}$ ou $f$ é minimal.

**Proposição 2** $\cancel{\exists}\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, ~~and~~ $\exists$ an analytic function $\varphi: S^1 \to \mathbb{R}$ such that

$$\varphi(x) = \Phi(x+\alpha) - \Phi(x)$$

com $\Phi: S^1 \to \mathbb{R}$ mensurável e metricamente denso com respeito a medida de Lebesgue

**Definição:** $X, Y$ espaços topológicos e $\mu$ uma medida em $X$. Uma aplicação mensurável $f: X \to Y$ é metricamente densa com respeito a $\mu$ se $\forall$ conjunto aberto não vazio $U \subset X$, $V \subset Y$ temos $\mu(U \cap f^{-1}(V)) > 0$.

Ex

Exemplo de Furstenberg: Existe um difeomorfismo analítico minimal de $T^2$ que não é (unicamente) ergódico.

Prova: Seja $f: T^2 \to \mathbb{T}^2$ dada por

$$f(x,y) := (x+\alpha, y + \varphi(x)) \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \text{ e}$$

$\varphi$ como na proposição 2.

Pela Proposição 0, $f$ tem um numero não-enumerável de medidas ergódicas. Se $f$ não fosse minimal teriamos que

$$\varphi(x) = \psi(x+\alpha) - \psi(x) \overset{\text{mas}}{+} r$$

para algum $\psi: S^1 \to \mathbb{R}$ contínua e $r \in \mathbb{Q}$.

Seja $F = \psi - \Phi$

$$F(x+\alpha) - F(x) = \psi(x+\alpha) - \psi(x) - (\Phi(x+\alpha) - \Phi(x))$$

$$= \varphi(x) + r - \varphi(x) = r$$

Agora $r \neq 0$, pois caso contrario pela ergodicidade de $R_\alpha$, $F$ seria constante

Isto é impossível pois $\psi$ contínua $\phi$ descontínua $\Rightarrow$ $\psi - \phi$ não é contínua.

Suponhamos $r > 0 \Rightarrow$

$$F(x+\alpha) = F(x) + r > F(x) \quad \forall x \in S^1$$

Mas já fizemos $F \circ T(x) \geq F(x)$, T ergódica

$\Rightarrow F(x) =$ constante qtp. $\boxed{\Rightarrow \Leftarrow}$