Aula #7

1

Teorema ergódico de Birkhoff

Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espaço σ-finito, $T: X \to X$ mensurável μ-invariante e $f: L^1(X, \mathcal{A}, \mu) \mapsto \mathbb{R}$. Então

(a) $\frac{1}{n}\left(f + f\circ T + \dots + f\circ T^{n-1}\right) \to \tilde{f}$ μ-qtp.

(b) $\cancel{\tilde{f} \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)}$ $\to$ $\left(\begin{array}{l} f \in L^1 \Rightarrow \tilde{f} \in L^1 \\ f \in L^p \Rightarrow \tilde{f} \in L^p \end{array} \right)$

(c) $\tilde{f}$ é T-invariante, ie, $\tilde{f}\circ T = \tilde{f}$ μ-qtp.

Além disso, se $\mu(X) < \infty$, então

(e) ~~(d)~~ $\int \tilde{f}\, d\mu = \int f\, d\mu$

(d) ~~(e)~~ $f \in L^p \Rightarrow \frac{1}{n}\left(\sum_{j=0}^{n-1} f\circ T^j\right) \to \tilde{f}$ em L^p ~~em L^2~~ ~~em média~~. (Teo. da T. Medida)

~~(f) $f \in L_p \Rightarrow$~~

Obs: $f: X \to \mathbb{C}$ (Vale tomando partes real e imaginária

Teorema Ergódico maximal

Hipóteses $\begin{cases} (X, \mathcal{A}, \mu) \text{ espaço } \sigma\text{-finito} \\ T: X \to X \text{ mensurável } \mu\text{-inv.} \\ f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu). \end{cases}$

Então se $f^*(x) = \sup_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} \left[f(x) + \ldots + f\,T^{n-1}(x) \right] \right)$

temos $f^*: X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é mensurável e

$$\int_{\{x : f^*(x) > 0\}} f \, d\mu \geq 0$$

Prova: Observe-se que

$$\{x : f^*(x) > 0\} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \{x : F_N(x) > 0\}$$

onde $\begin{cases} f_n = f + f\circ T + \ldots + f\circ T^{n-1} & n \geq 1 \\ F_N = \max\limits_{1 \leq n \leq N} f_n \end{cases}$

obs: que Nova def. $\Rightarrow f_0 \equiv 0$

$\tilde{F}_N = \max\limits_{0 \leq n \leq N} f_n$

$\{x : \tilde{F}_N(x) > 0\} = \{x : F_N(x) > 0\}$

Assim Basta provar que

$$\int_{\{x : \tilde{F}_N(x) > 0\}} f \, d\mu \geq 0$$

Certamente $\tilde{F}_N \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\tilde{F}_N \circ T \in L^1(\ldots)$

Para cada $0 \leq n \leq N$ tem-se que ③

$F_N \geq f_n$. Assim $\tilde{F}_N \circ T \geq f_n \circ T$

$\Rightarrow \quad \tilde{F}_N \circ T + f \geq f_n \circ T + f = f_{n+1}$

Luego, se $N \geq 1$,

~~Assim~~ $\tilde{F}_N \circ T(x) + f(x) \geq \max_{1 \leq n \leq N} f_n(x) = F_N(x)$

$f_n \circ$

$= \max_{0 \leq n \leq N} f_n(x)$ qdo $F_N(x) > 0$

$= \tilde{F}_N(x)$

i.e: ~~Se $F_N(x) > 0$ então~~

$f \geq \tilde{F}_N - \tilde{F}_N \circ T$ em $A = \{x : \tilde{F}_N(x) > 0\}$

Assim

$$\int_A f \geq \int_A \tilde{F}_N - \int_A \tilde{F}_N \circ T$$

$$= \int_X \tilde{F}_N - \int_A \tilde{F}_N \circ T$$ pois $\tilde{F}_N = 0$ em $X \setminus A$

$$\geq \int_X \tilde{F}_N - \int_X \tilde{F}_N \circ T \, d\mu \quad -$$

pois $\tilde{F}_N \geq 0$

e assim $\tilde{F}_N \circ T \geq 0$

$= 0$ pois ~~T~~ preserva μ.
$\tilde{F}_N \in L^1$ ☐

Corolário: Se $\mu(X) < \infty$. Tem-se

ⓐ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \mu(\{x \in X : f^*(x) > \alpha\} \leq \int_{\{x : f^*(x) > \alpha\}} f \, d\mu$$

ⓑ $\mu(\{x : f^*(x) > \alpha\} \to 0$ se $\alpha \to \infty$

~~ⓒ $\mu(\{x \in X : f^*(x$~~

ⓒ $\mu(\{x : f^*(x) = \infty\}) = 0$.

Prova de ⓐ Como $\mu(X) < \infty \Rightarrow f - \alpha \in L^1$

Pelo Teor. erg. maximal

$$0 \leq \int_{\{x : f^*(x) > \alpha\}} (f - \alpha) \, d\mu = \int_{\{x : f^*(x) > \alpha\}} f \, d\mu - \int_{\{x : f^*(x) > \alpha\}} \alpha \, d\mu$$

$$\int_{\{x: f^*(x) > \alpha\}} (f-\alpha)\, d\mu = \int_{\{x: f^*(x) > \alpha\}} f\, d\mu - \alpha\, \mu(\{x: f^*(x) > \alpha\})$$

(b) Pela parte {a} $\alpha \to \infty$, $\alpha \geq 0$

$$\mu(\{x: f^*(x) > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\{x: f^*(x) > \alpha\}} f\, d\mu \leq \frac{1}{\alpha} \overbrace{\int |f|\, d\mu}^{< \infty}$$

$\downarrow$ qdo $\alpha \to \infty$

0

(c) $\{x: f^*(x) = \infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x: f^*(x) > n\}$

<u>Prova do Teor. de Birkhoff:</u>

<u>Parte (a)</u> O conj. dos pontos onde não há convergência da media de Birkhoff pode escrever-se como:

$$\bigcup_{\substack{\alpha < \beta \\ \alpha, \beta \in \mathbb{Q}}} E_{\alpha, \beta} \quad \text{onde}$$

⑥

$$E_{\alpha,\beta} = \left\{ x : \underline{\lim} \frac{1}{n} \left(\sum_{j=0}^{n-1} f\circ T^j(x) \right) < \alpha < \beta < \overline{\lim} \frac{1}{n} \left(\sum_{j=0}^{n-1} f\circ T^j(x) \right) \right\}$$

① $E_{\alpha,\beta}$ é mensurável porque $\underline{\lim}$ e $\overline{\lim}$ de funções mensuráveis são mensuráveis

② $E_{\alpha,\beta}$ é T-invariante porque $\overline{\lim}$ e $\underline{\lim}$ são T-invariantes

③ $\mu(E_{\alpha,\beta}) < \infty$

De fato: Seja $C \subset E_{\alpha,\beta}$ mensurável de medida finita. Pode-se supor $\beta > 0$ caso contrário se faz a prova para $-f$ e $-\alpha$

Pelo lema

$$\int f - \beta f_C \geq 0 \qquad f_C = \text{função caract. } \in L'$$

$$\{x : (f-\beta f_C)^* > 0\}$$

Se $x \in E_{\alpha,\beta} \Rightarrow$ para algum n, $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (f\circ T^j)(x) > \beta$

$$\Rightarrow \quad (f-\beta f_C)^*(x) > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{\alpha,\beta} \subset \{x : (f-\beta f_C)^* > 0}$$

Pelo Teorema erg. maximal:

$$\int_{\{x:(f-\beta f_C)^*(x)>0\}} (f-\beta f_C)\,d\mu \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_{\{x:(f-\beta f_C)^*(x)\}} f\,d\mu \geq \beta \int_{\{x:(f-\beta f_C)^*>0\}} f_C$$

$$\geq \beta \int_{E_{\alpha,\beta}} f_C = \beta\,\mu(C)$$

Concluindo: Se $C \subset E_{\alpha,\beta}$ tem medida finita com $\beta>0$

$$\mu(C) \leq \frac{1}{\beta} \int_{\{x:(f-\beta f_C)^*(x)>0\}} f\,d\mu \leq \frac{1}{\beta}\int_X |f|\,d\mu$$

Como X é σ-finito $E_{\alpha,\beta} = \bigcup_n C_n$

$C_1 \subset C_2 \subset C_3 \cdots$ $\quad \mu(C_n) \leq \frac{1}{\beta}\int_X |f|\,d\mu < \infty$

$$\Rightarrow \mu(E_{\alpha,\beta}) \leq \frac{1}{\beta}\int_X |f|\,d\mu$$

(4) Aplicando o corolário do lemma $f-\beta|_{E_{\alpha,\beta}} \in L^1$ e $E_{\alpha,\beta}$ obtemos

$$\beta\,\mu(E_{\alpha,\beta}) \leq \int_{\{x \in E_{\alpha,\beta} : f^*(x) > \beta\}} f = \int_{E_{\alpha,\beta}} f\,d\mu$$

já que ~~$E_{\alpha,\beta} = \{x : f^*(x) > \beta\}$~~.

$E_{\alpha,\beta} = \{x \in E_{\alpha,\beta} : f^*|_{E_{\alpha,\beta}} > \beta\}$

Usando agora $-f|_{E_{\alpha,\beta}}$ e $-\alpha$

~~$-\alpha\,\mu(E_{\alpha,\beta}) \leq (-\alpha)\,\mu\{x : (-f)|_{E_{\alpha,\beta}}^*(x) > -\alpha\}$~~

$E_{\alpha,\beta} = \{x \in E_{\alpha,\beta} : (-f)^*|_{E_{\alpha,\beta}} > -\alpha\}$

$\Rightarrow$

$$-\alpha\,\mu(E_{\alpha,\beta}) = -\alpha\,\mu(\{x \in E_{\alpha,\beta} : (-f)^*|_{E_{\alpha,\beta}} > -\alpha\})$$

$$\leq \int_{E_{\alpha,\beta}} (-f)|_{E_{\alpha,\beta}} = \int_{E_{\alpha,\beta}} -f\,d\mu$$

$$\Rightarrow \alpha\,\mu(E_{\alpha,\beta}) \geq \int_{E_{\alpha,\beta}} f\,d\mu$$

Então

$$\beta\, \mu(E_{\alpha,\beta}) \leq \int_{E_{\alpha,\beta}} f\, d\mu \leq \alpha\, \mu(E_{\alpha,\beta})$$

$\Rightarrow \mu(E_{\alpha,\beta}) = 0$ pois $\beta > \alpha$

$$\Rightarrow \mu\Big(\bigcup_{\substack{\alpha<\beta \\ \alpha,\beta\in\mathbb{Q}}} E_{\alpha,\beta}\Big) = 0$$

Prova de (b):

i.e: $f \in L^p \to \tilde{f} \in L^p$

caso 1 $p < \infty$

$$(*)\quad |\tilde{f}(x)| \leq \Big| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\circ T^j(x) \Big|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |f\circ T^j(x)| \quad \text{q.t.p.}$$

Este ultimo limite existe por (a) aplicado a $|f|$

$|f|\circ T^j(x) = |f\circ T^j(x)|$

Assim $\quad |\hat{f}(x)|^p \leq \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |f\circ T^j(x)|\Big)^p$

$|\tilde{f}(x)| \leq \|f\|_\infty$ Caso $p = \infty$

$\Rightarrow \hat{f} \in L^\infty$

Como $|\tilde{f}|^p$ é uma função positiva para provar que é integrável basta mostrar que o limite a direita define uma função integrável.

(f mensurável $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\circ T^j = \tilde{f}$

é mensurável ~~a~~ módulo 0. Assim podemos supor $\tilde{f}$ mensurável.)

Pelo Lema de Fatou basta provar que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |f\circ T^j|\right)^p d\mu < \infty$$

Porem

$$\int_X \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |f\circ T^j|\right)^p d\mu = \left\|\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |f\circ T^j|\right\|^p$$

$$\leq \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \|f\circ T^j\|_p\right)^p = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \|f\|_p\right)^p$$

$$= \|f\|_p^p$$

T preserva medida

$\Rightarrow$ $|\tilde{f}|^p$ é integrável e sua integral é $\leq \|f\|_p^p$

$\Rightarrow$ $\tilde{f} \in L^p$ $\quad$ $\|\tilde{f}\|_p \leq \|f\|_p$

OK

11

Prova de (c)

$$\tilde{f}\circ T(x) = \lim_n \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^{j+1}(x))$$

$$= \lim_n \left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} f(T^j(x)) - \underbrace{\frac{1}{n} f(x)}_{\to 0} \right)$$

$$= \lim \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} f(T^j(x)) \right)$$

$$= \tilde{f}(x) \qquad q.t.p.\ x$$

Prova de (d)

~~Se $\mu(X) < \infty$, $f \in L^p \Rightarrow f \in L^1$~~

Assim $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j$

Prova de ⓓ $\tilde{f} \in L^p$

ⓓ $\Rightarrow \frac{1}{n}\left(\sum_{j=0}^{n-1} f\circ T^j\right) \to \tilde{f}$ em L^p

Prova: Suponha $f \in L^\infty \Rightarrow \tilde{f} \in L^\infty$. ~~(m(X)~~

(como $f \in L^1$ (m(X) < ∞)

~~Assim~~

(✗) $\left|\tilde{f} - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\circ T^j\right|^p$ converge a 0 em qtp. (Parte ⓐ)

Alem disso:

$$|\tilde{f}(x)| \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} |f\circ T^j(x)|$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \|f\|_\infty = \|f\|_\infty$$

μ-q.t.p

Entao

$$\left|\tilde{f}(x) - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} (f\circ T^j)(x)\right|^p \le$$

$$\left|\, \|\tilde{f}\|_\infty + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \|f\circ T^j\|_\infty \right|^p \le \cancel{2\|f\|_\infty}^p$$

$$\le \left(2\|f\|_\infty\right)^p \le 2^p \|f\|_\infty^p$$

Portanto a seq ⊛ está dominada por uma constante. Então pelo Teor. da conv. dominada, a integral (3) converge a 0. Isto prova ⊛ no caso $f \in L^\infty(X) \subset L^p(X)$.

Se $f \in L^p(X)$, dado $\varepsilon > 0$

tomamos $f_0 \in L^\infty(X)$ tq

$$\| f - f_0 \|_p < \varepsilon/3$$

e $N > 0$ tq. $\forall n \geq N$,

$$\Big\| \tilde{f}_0 - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_0 \circ T^j \Big\|_p \leq \varepsilon/3 \qquad (*3)$$

~~Se n ≥ N~~ Então

$$\Big\| \tilde{f} - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_0 T^j \Big\|_p \leq \| \tilde{f} - \hat{f}_0 \|_p + \Big\| \tilde{f}_0 - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_0 \circ T^j \Big\|_p + \Big\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (f - f_0) \circ T^j \Big\|_p \qquad (*4)$$

Porém $\tilde{f} - \tilde{f}_0 = \widetilde{(f - f_0)}$

Portanto (como $\|\tilde{f}\|_p \le \|f\|_p$)

$$\|\tilde{f} - \tilde{f_0}\|_p = \|\widetilde{(f-f_0)}\|_p$$
$$\le \underline{\|f - f_0\|_p \le \varepsilon/3}$$

Por outra parte

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (f - f_0)\circ T^j \right\|_p \le \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \|f - f_0\|_p$$
$$= \|f - f_0\|_p < \varepsilon/3$$

Se $n \ge N$ o segundo somando em (*4) e $\le \varepsilon/3$.

Portanto se $n \ge N$

$$\left\| \tilde{f} - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\circ T^j \right\|_p \le \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ (d)

Prova de (e)

$f \in L^p \Rightarrow f \in L^1$ $(m(X) < \infty)$

Por (a) $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\circ T^j \longrightarrow \tilde{f}$ $\underline{\text{em } L^1}$

Logo $$\int_X \tilde{f}\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int_X f\circ T^j\, d\mu =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int_X f\, d\mu = \int_X f\, d\mu$$

Ergodicidade

Def. $T : (X, \mathcal{A}, \mu) \circlearrowleft$ é ergódica

(ou também μ é ergódica).

se $A \in \mathcal{A}$ e T-invariante

(i.e. $T^{-1}(A) = A \mod 0$) $\mu(T^{-1}(A) \Delta A) = 0$

então $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A^c) = 0$.

Se μ for prob.

$\mu(A) = 0$ ou 1

Teorema .. São equivalentes

(a) T ergódica

(b) $\forall\ f : X \to \mathbb{R}$ mensurável tq

$f(Tx) \geq f(x)$ μ-qtp,

tem-se f é constante μ-qtp.

(c) $\forall\ f : X \to \mathbb{R}$ mensurável tq

$f(T(x)) = f(x)$ μ-qtp,

tem-se f é constante μ-qtp

(d) $\forall\ f \in L^1$, a média de Birkhoff

$\tilde{f}$ é constante μ-qtp e igual a

$$\int f\,d\mu$$

(e) $\forall\, 1 \le p < \infty$

$\forall f \in L^p$ $f: X \to \mathbb{R}$, tq $f \circ T = f$ μ qtp

f é constante μ-qtp

(e') $\exists\, p$ ~~tq $\forall f \in L^p$~~ . . . $(\forall f \in C^\infty)$ . . .

(f') $\forall\, A, B \in \mathfrak{A}$ vale

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu\left(T^{-j}(A) \cap B\right) = \mu(A)\,\mu(B)$$

Prova

(a) $\Rightarrow$ (b)

Seja f mensurável tal que $f \circ T(x) \geq f(x)$ μ-qtp. Se f não é constante μ qtp então $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tq

$$B = \{x : f(x) \le c\}$$

satisfaz $0 < \mu(B) < 1$.

Porém $y \in T^{-1}(B) \Rightarrow$

$$c \geq f(T(y)) \underset{\substack{T \\ \text{hipotes}}}{\geq} f(y) \mod \emptyset$$

assim $y \in T^{-1}(B) \Rightarrow y \in B$

$\Rightarrow \quad T^{-1}(B) \subset B \mod 0$

Com T preserva μ

$$\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$$

$\Rightarrow \quad T^{-1}(B) = B \mod 0$

$\Rightarrow \quad \mu(B) = 0$ ou 1. $\boxed{\Rightarrow \Leftarrow}$

ⓑ $\Rightarrow$ ⓒ trivial

ⓒ $\Rightarrow$ ⓓ

Pelo Teo de Birkhoff $\hat{f}$ é T-invariante e mensurável. Por ⓒ $\hat{f}$ é constante μ-qtp e

~~$\int f d\mu = \int \hat{f} d\mu = \hat{f}$ = constan~~

$$\int f d\mu = \int \hat{f} d\mu = \hat{f} \text{ constante}$$

d $\Rightarrow$ e ~~[illegible]~~

Se $f \circ T = f$

~~e $\Rightarrow$ f~~

$\Rightarrow$ a média orbital de f é $\tilde{f}$

$\tilde{f} = f$ é constante μ-qtp

e $\Rightarrow$ f

$\tilde{f}_A$ é T-inv

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_A(T^j(x)) \overset{\text{Teor. Birkhoff}}{=} \tilde{f}_A \overset{e}{=} \text{constante} \quad \text{qtp.}$$

$$\tilde{f}_A = \int \tilde{f}_A \, d\mu \overset{\text{Birkhoff}}{=} \int f_A \, d\mu = \mu(A) \quad \text{qtp}$$

~~f $\Rightarrow$~~ Assim

$$\mu(A)\cdot\mu(B) = \int_X \mu(A)\cdot f_B \, d\mu$$

$$= \int_X \lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_A(T^j(x)) \cdot f_B \, d\mu$$

Teor. da conv. dominada

$$= \lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int_X f_A \circ T^j \cdot f_B$$