Separata do N.º 4, Vol. I (Abril, Maio e Junho de 1948) de
«Kriterion», Revista da Faculdade de Filosofia de Minas Gerais

**A MATEMÁTICA MODERNA
E A
NECESSIDADE DE SUA DIFUSÃO**

POR

ACHILLE BASSI

(Antigo professor da Universidade de Bolonha e
da Faculdade Nacional de Filosofia.

Professor de Matemática da Faculdade de Filosofia de Minas Gerais)

BELO HORIZONTE - MINAS GERAIS - BRASIL

A MATEMÁTICA MODERNA E A NECESSIDADE DE SUA DIFUSÃO (*)

Sou aqui vosso hóspede por alguns dias e fui convidado a pronunciar as palavras inaugurais dos cursos desta jovem Universidade. É esta uma honra bem grande para mim, conferida pela excepcional bondade de colegas e amigos. Nunca fui orador; por isso mesmo, no primeiro momento, declinei do encargo. Entretanto, como insistissem, resolvi dizer algumas palavras de encorajamento. É realmente com satisfação e alegria profunda que os europeus assistem ao progresso, nestas vastas e jovens terras, das várias formas da vida; e agora, ainda mais que no passado, do amor pelo saber e por um ideal de vida que foi, podemos dizer, tão nosso, ideal bem digno de que a êle se dediquem tôdas as energias — como auguramos, especialmente neste momento de tão grave crise para a Europa—, e de que possa, nestas regiões, ser continuado com novos meios e fé.

Nas aulas inaugurais, faz-se muitas vêzes uma resenha, naturalmente com fins de divulgação, de uma parte da ciência, pondo-se em especial evidência os novos resultados e aspectos do pensamento científico. Não fugirei a êste costume, que me proporciona um desejado ensejo para combater alguns preconceitos, referentes a minha ciência.

Ao fim desta palestra, permitir-me-ei também, *data venia*, lançar uma palavra de encorajamento às pessoas que plei-íam participe o Brasil, em proporção maior do que no passado, do trabalho internacional de pesquisa. Alegrar-me-ia

(*) Aula inaugural dos cursos da Universidade de Minas Gerais, proferida em março de 1945.

imensamente se pudesse ser iniciada de fato uma ação neste sentido.

* * *

O preconceito a que me refiro (aludo aqui a êle, porque estou falando também a não-especialistas) é o que faz crer seja a Matemática ciência já acabada de construir ou quase construída; que, em última análise, já ultrapassou sua fase criadora mais importante e agora está destinada a um desenvolvimento vagoroso. Não haveria, pois, necessidade de insistir muito sôbre pesquisas a serem feitas nela.

Afirmo sem hesitação que a verdade é oposto dêste preconceito, cuja causa está, evidentemente, no fato de as mais conhecidas aplicações da Matemática à vida prática se referirem a partes daquela relativamente antigas.

Vejamos alguns exemplos. Para a pequena contabilidade cotidiana, são suficientes noções aritméticas conhecidas já pelos antigos egípcios, as quais, porém, são agora expressas por meio duma notação gráfica que, nos povos europeus, foi adotada há cinco séculos. Depois, para o estudante das escolas secundárias, são suficientes noções de Matemática que, feitas pequenas modificações, representam o estado de conhecimentos matemáticos no comêço de 1600. Ao engenheiro, bastam, nas aplicações mais usuais, conhecimentos que, em grande parte, já existiam cêrca de setenta anos atrás. Estas são as razões que fizeram nascer tal preconceito. Mas, a verdade é inteiramente diversa. Se imaginássemos descritas numa série de volumes as principais teorias da Matemática, e se tivesse havido o cuidado, ao redigi-las, de que cada uma ocupasse espaço proporcional à sua amplitude e importância, verificar-se-ia, talvez com viva surpresa de muitos de vós, que a Matemática desenvolvida neste último meio século ocupa a metade, pelo menos, do espaço to-

tal. Registrar-se-ia, pois, êste fato inesperado: numa ciência tão antiga como a Matemática, em espaço de anos mais breve do que a já tão breve vida humana, a humanidade soube duplicar o conjunto de conhecimentos que ela mesma elaborou através dos milênios, os quais representam o fruto de diferentes civilizações e a obra de tantos gênios.

Fenômeno tão surpreendente só pode ser explicado pensando-se na extraordinária multiplicação do número dos pesquisadores, que se encontram agora em quase tôdas as partes do mundo e sobem a alguns milhares. Tal multiplicação é devida a uma dúplice causa: ao crescente número dêstes nos países de mais antiga tradição cultural e ao contínuo alargamento da área geográfica dos países que se dedicam a tais ocupações científicas. Esta área, no início dos tempos modernos, foi quase exclusivamente a Itália, que constituiu, por quase quatro séculos, de 1200 até 1500, o foco mais intenso. Na segunda metade do século XVI, estendeu-se à França e depois sucessivamente à Inglaterra, à Alemanha e aos Estados Escandinavos. Desde o fim do século passado, os Estados Unidos da América passaram a dar ao progresso de nossa ciência uma contribuição cada vez mais eficaz e agora muito forte, da qual depois participaram também o Japão, a Polônia e a Rússia.

Atualmente, e pela primeira vez, êste espírito de pesquisa começa a penetrar na América Latina, onde se manifestam bem vivos sinais de estimulado interêsse. Êsses sinais são visíveis agora também entre os grandes povos do Continente asiático, que despertam de um sono milenário, e também na longínqua Oceania.

Li, não me lembro em que autor, um conceito segundo o qual os períodos de maior desenvolvimento da Matemática são três: o grego, a segunda metade de 1600 e o período contemporâneo. Esta opinião pode, num primeiro momento, surpreender, e contrasta com um pensamento comum, que

considera o século passado um grande século para o progresso da Matemática. Este último século foi bem assim, sem dúvida; e apresenta, entre outras coisas, magnífica série de grandes matemáticos. Acredito, porém, que a afirmação referida não possa ser considerada sem base, quando, ao invés de encararmos os desenvolvimentos de idéias e conceitos já conhecidos, nos limitamos a considerar a *introdução de novas idéias*.

A Matemática contemporânea, com efeito, apresenta um número tal de novas idéias como nunca aconteceu na história de tão antiga ciência; ao contrário, a Matemática do século passado é exuberante de admiráveis desenvolvimentos.

O primeiro fato se torna evidente também por motivos exteriores. Em alguns livros de Matemática contemporânea, o número de conceitos novos introduzidos e, por consequência, de palavras e notações novas usadas, é tal, que foi preciso anexar, no fim de cada volume, uma espécie de pequeno dicionário, para reexplicar sumariamente as novas palavras e notações adotadas. Nunca nos livros antigos se precisou agir de semelhante maneira.

Vamos, pois, examinar as principais mudanças que tão extraordinariamente transformaram o mundo matemático nêstes últimos decênios. Mas, para poder fazer isso, é preciso antes lembrar, ainda que sumariamente, qual era a situação anterior, criada nas épocas que vou chamar de Greco-Italiana e de Cartésio-Newtoniana.

* * *

O primeiro período de grande desenvolvimento, o grego, estabelece, pela primeira vez, com clareza, a relação entre premissa e consequência, isto é, entre causa e efeito, no campo dos fenômenos matemáticos, fechando assim o período anterior, de duração multimilenária — no qual o “scibile” matemático era constituído quase exclusivamente de mera coleção

de fatos ou regras empíricas, relacionadas principalmente com o cálculo aritmético, o cálculo das áreas — e inaugurando o conceito de ciência dedutiva.

Segundo êste conceito, a ciência não é simplesmente atividade descobridora de fatos empíricos isolados, mas também atividade organizadora de tais fatos, tomando como norma a relação entre premissa e consequência, em conjunto harmônicos, que são as teorias científicas e, no caso da Matemática, os sistemas lógicos.

De tais sistemas, os livros de Geometria dos Elementos de Euclides constituem o exemplo mais antigo e mais famoso, que ainda agora inspira admiração pelas cautelas, diria, quase modernas, de rigor científico em que tal obra é inspirada. Elaboração, sem dúvida, imensamente superior a tôdas as anteriores.

Ao grande período grego segue, como se sabe, bem longo período, mais de doze séculos, sem um progresso considerável nos conhecimentos; mas, ocupado principalmente pelo trabalho de comentário (algumas vêzes bom, outras vêzes a assinalar decadência), no qual as doutrinas elaboradas se difundem a princípio no mundo romano e depois, durante a Idade Média, nas populações germânicas e árabes, que tinham ocupado as áreas geográficas das antigas civilizações. Neste período, os árabes tomaram conhecimento também das idéias e dos métodos aritmológicos dos hindus e lhes acrescentaram importantes desenvolvimentos. Estas idéias, entrando depois em contacto com o mundo ocidental, foram os germes dos novos progressos.

O sinal do despertar do mundo ocidental foi dado pela publicação, no ano de 1202, de um livro famoso, que marcou época: Liber Abaci. O autor é um navegante e um mercador de Pisa, Leonardo Pisano, cognominado também Fibonaci, o que significa “filho de Bonaci”, homem, quase diria, da estirpe do Marco Polo. No prefácio de sua grande obra, em quinze

partes, explica como havendo navegado em tôdas as costas do Mediterrâneo e viajado nas terras orientais, estudando com grande paixão a ciência dos gregos, a dos árabes e a dos hindús, tinha ali exposto, em síntese, os seus conhecimentos. Afirma ter achado o sistema numérico dos árabes e hindús superior aos demais e o recomenda a todos, com o fim, diz, de que "a gente latina não fique ainda dêle desprovida". Palavras dignas de Dante! Este livro, no qual as contribuições pessoais são numerosas e geniais, foi, por muito tempo, a base da renovada ciência matemática no Ocidente. Em dois séculos (foram precisos dois séculos!) a Itália convenceu-se a si mesma e aos outros da necessidade do novo sistema numérico, sem o qual, com efeito, nem a Álgebra Elementar se teria podido desenvolver; e tornou-se, depois, mestra da arte do novo cálculo numérico e algébrico, que constituiu um conjunto de regras justamente chamado, por alguns séculos, de "Prática Italiana".

Novamente a Itália, em 1500, provocou um progresso importante, descobrindo a resolução das equações de 3.º e 4.º graus. Esta descoberta foi acolhida, a princípio, com incredulidade e depois com viva surpresa, porque muitos matemáticos tinham julgado o problema insolúvel (por exemplo, Luca Pacioli, do século precedente). Tem, aliás, grande importância, não somente como descoberta da resolução de novo tipo de equação, mas, sobretudo, por ter quebrado, de maneira clara e incontestável, o dogma medieval sobre a insuperabilidade da ciência dos gregos. Era a primeira vez que este fato acontecia na Matemática, porque os progressos anteriores diziam respeito especialmente ao método e não a substância dos conhecimentos.

Pois bem: aquêles limites do mundo antigo que, no campo geográfico, acabavam de ser ultrapassados por Cristovão Colombo, eram agora rompidos, também, no campo espiritual, e por obra da escola italiana.

Isso acontecia por cêrca de 1510, sendo o descobridor, Scipione dal Ferro, leitor de Matemática de minha velha Universidade de Bolonha. Assim, com as descobertas italianas de 1500, o espírito humano retomou a confiança e a coragem para novos e mais importantes progressos.

O segundo período de grandes, inovações nas ciências matemáticas é a segunda metade de 1600. É a época Cartésio-Newtoniana, para a qual as descobertas anteriores prepararam a base técnica e psíquica.

Se não me engano, foram quatro as principais idéias novas: a de *coordenada*; a idéia, a esta conexas, de *função* (assim como a sugeriam os exemplos comuns naquela época), e os conceitos, um inverso do outro, de *diferencial* e de *integral*. Idéias que, em face das antigas, possuíam extraordinária capacidade criadora, a qual, ainda hoje, depois de dois séculos de imensos desenvolvimentos, não está esgotada.

Quem confronta o estado da Matemática na primeira metade de 1600 com o dos primeiros anos de 1700 tem a impressão de chegar a um mundo novo, que pouco apresenta de comum com o antigo. Teorias novas, já construídas, tendo, em comparação com as antigas, uma capacidade de análise e síntese absolutamente inesperada, e a visão de campos desmesurados de pesquisa, que um matemático anterior nem teria podido imaginar. Os desenvolvimentos que se seguiram foram somente, o cumprimento de tão extraordinária promessa e os despojos da exploração de tão riquíssimos campos.

É bom repetir que *o trabalho de construção fundado sobre tais idéias prossegue ainda agora e está bem longe de ser concluído.*

Em particular, obtivemos o admirável desenvolvimento da mecânica clássica, a astronomia gravitacional e, depois, no século seguinte, praticamente toda a Matemática Aplicada que se funda sobre tais idéias. No campo da Matemática Pu-

ra, as teorias tão vastas das equações diferenciais e, depois, a das equações integrais e íntegro-diferenciais; a teoria das funções analíticas de variável real ou complexa, a de importantes tipos dessas últimas funções, como as funções elíticas, as automorfias; a geometria analítica e a diferencial, etc. Eis todo um novo corpo de doutrinas entre si mais ou menos ligadas, que se pode exprimir com o nome genérico de *Análise*: "*Analysis Infinitorum*", como lhe chamava Euler.

O teatro destas novas descobertas foi, como todos sabem, a Europa, que se tornou como que uma espécie de dilatação espiritual da Itália da Renascença e que, apesar de serem agora, já conhecidas tôdas ou quase tôdas as terras do planeta, continuou a ser, de fato, o coração dêste.

Nessa época, que chamaríamos da Matemática moderna, podem-se distinguir dois períodos. O primeiro, que ocupa aproximadamente o século XVIII, destinado especialmente a desfrutar as grandes descobertas newtonianas, e o segundo, o século passado, no qual a Matemática conquista, como iremos ver, nova liberdade.

O primeiro período é aquêle em que o homem consegue, sob os auspícios de Arquimedes, Galileu, e Newton, descrever, pela primeira vez na história de seu desenvolvimento, fenômenos naturais como os astronômicos — que, base de antigas religiões, desde milênios tinham impressionado sua fantasia —, e isto com uma capacidade de previsão extremamente precisa. Século em que se enunciam, pela primeira vez, leis mecânicas universais, de incomparável fôrça sintética; em que o homem, eterno menino, pensa ter desvendado algum dos mais apaixonantes mistérios da natureza, haver descoberto algumas das suas leis, as quais, conforme a sentença de Galileu, têm que ser escritas com caracteres matemáticos.

É êste também o período em que a ciência alcança, pela primeira vez, em consequência de alguns de seus mais impressionantes resultados, notável repercussão popular.

O Cálculo Infinitesimal, cujos primórdios remontam a Arquimedes, e que, depois de Cavalieri, estava em incubação, foi o meio mais adequado para alcançar tais descobertas, e por muito tempo desenvolveu-se tendo em vista especialmente esta finalidade. Descuidou-se, pois, das razões íntimas que justificam as regras do cálculo mesmo e da subordinação lógica dos fatos analíticos de que se serve. Além disso, a "Nova Matemática" nasceu dirigida para a Física: "ancilla physicae", ter-se-ia dito, parafraseando uma sentença medieval.

Releva notar que pouco ou nada disso pode ser observado na Matemática grega e, também, na italiana de 1500. Este fato, por si só, teria podido fazer compreender aos espíritos mais sensíveis que se tratava de uma situação anormal. A reação, como efeito, não podia faltar e verificou-se no século seguinte.

* * *

A Matemática nova iniciou-se nas primeiras décadas de 1800, notadamente depois de 1820. Seus principais autores são, contrariamente ao que havia acontecido antes, moços precoces, sobremaneira sensíveis às necessidades que a ciência, filha também do ambiente social, vaga mas instintivamente sentia.

E' um singular espetáculo o proporcionado por êstes moços que, receptivos às necessidades do ambiente, se propunham, sòzinhos, novos rumos de estudos gerais e abstratíssimos, guiados só pelo próprio instinto. Chamam-se, por exemplo, Abel, e também Jacobi. Galois é um irmão espiritual dêstes. Crescem longe dos ambientes tradicionais, um na Noruega, outro em Königsberg. Pelas Academias, que permaneciam com a mentalidade do século anterior, são êles pouco apreciados.

Do primeiro, é bem conhecido o aforisma de que não existem problemas por sua natureza "a priori" insolúveis. Equi-

vale a dizer que cada problema é, ou não, resolúvel em dependência dos meios (técnicos ou lógicos) de que se dispõe para a solução. Questão preliminar importante, antes de atacar um problema, é, pois, conhecer os meios necessários para poder resolvê-lo. Torna-se evidente, assim, que a cada problema, considerado dêste ponto de vista, pode ser dada uma forma, na qual admita uma resposta. Lembraremos êste aforisma, ao falar da axiomática moderna.

Do segundo, foi sempre lembrada a orgulhosa e autônômica afirmação de que “o único escopo da ciência é honrar o espírito humano, e, para êste fim, uma questão de teoria dos números tem o mesmo valor que uma questão sôbre o sistema do mundo”.

Essa nova mentalidade no encarar os problemas e no escolhê-los deu à Matemática do século XIX nova liberdade de espírito, que a distinguiu da Matemática do século anterior, libertou-a da servidão da Física e, proporcionando novos objetos às pesquisas, alimentou seu exuberante desenvolvimento. A tão importante conquista nunca mais renunciou.

A tendência, na qual se inspira o aforisma de Jacobi, é da época. Na arte, manifestam-se tendências análogas. Faz-se individual e não social. Decai a grande arquitetura, tão apta a agir sôbre o espírito popular. As novas produções artísticas podem agora ser recolhidas a edifícios públicos, às pinacotecas, onde são admiradas por um pequeno número de pessoas e aonde o povo não vai. Na ciência, as novas teorias matemáticas têm novas e profundas qualidades estéticas, mas são feitas para poucos, não despertam a curiosidade popular, como as do século precedente.

Ressoa ainda o ideal da Renascença e também um pouco o euclidiano, mas com uma emoção nova, própria da época.

* * *

Reuni os dois séculos considerados numa só época, por-

que sua produção matemática, conquanto guiada por ânimo diverso e dirigida para fins diferentes, me parece ser preponderantemente o desenvolvimento das mesmas idéias novas introduzidas na Matemática no fim do século XVII. Parece-me que tal coisa não se repete na época contemporânea, que assinala, se não me engano, um período de rápidas mudanças.

Idéias novas introduzidas, no começo, de maneira muito tímida, e depois, no mesmo século passado, em forma mais desembaraçada e segura, vieram a formar, fundindo-se, estendendo-se e absorvendo-se entre si, imensa corrente, que submergiu as velhas idéias e criou um novo e mais coeso mundo científico, em que se reencontram as velhas teorias como escassos e separados fragmentos. Idéias e teorias que estão muito longe de ter encontrado a forma definitiva e se acham em rápida transformação.

Um jardineiro que, depois de ausência prolongada, volte ao seu jardim, se compraz com certeza de ver mais altas as plantas deixadas já grandes, mas será atraído sobretudo pelas plantas completamente novas que tenham, porventura, crescido onde nenhuma ou quase nenhuma antes existia.

Assim nós, postos na posição espiritual de um matemático de cinqüenta anos atrás, dirigiremos nossa atenção às teorias novas e as indicaremos aos jovens que nos escutam.

Evidentemente, ao atrair a atenção dos ouvintes para estas novas criações, não pretendemos negar o interêsse e a importância que apresenta o desenvolvimento e a complementação das teorias de origem mais antiga.

Como já disse, penso que as velhas teorias não tenham esgotado sua própria fôrça criadora e possam dar frutos não menos importantes do que as novas. A história da Matemática sempre desmentiu a hipótese contrária.

Pense-se, por exemplo, na importância nunca desmentida das teorias da física matemática desenvolvidas ao redor

das criações ou descobertas de Fourier, Fresnel, Maxwell e Einstein. Os vários cálculos (vetorial, tensorial, diferencial absoluto, de Heaveside, etc.), as várias "mecânicas" (relativística, ondulatória, quântica, etc.) desenvolvidas para satisfazer os desejos dos físicos. Pense-se nas numerosíssimas teorias de Matemática não aplicada que constituem a prossecução de impulsos de idéias do século passado: teoria das funções analíticas de muitas variáveis, a geometria algébrica, que é a extensão do estudo das equações algébricas, as várias geometrias diferenciais modernas, a teoria dos funcionais reais e complexos, os tantos outros diferentes desenvolvimentos da análise, etc.; finalmente, também na teoria dos números, que remonta aos gregos, decana das teorias matemáticas, a qual ampliou a esfera de suas deduções e de seu desenvolvimento nos ambientes matemáticos mais largos que se iam criando.

Prefiro nada falar sôbre o assunto, não porque julgue que seja de menor interêsse, mas justamente porque não é vazado naquele espírito novo que mudou, como disse, a atmosfera científica.

Penso que a povos novos sejam mais adequadas teorias novas, porque sempre acontece que nas teorias novas conseguem êles encontrar melhor a própria originalidade. É esta a razão por que a Itália cultivou com tanto sucesso a geometria algébrica desde 1870 e a Polônia a teoria dos conjuntos desde 1920; teorias que, naquelas épocas, se achavam ambas na mais promissora mocidade.

Vejamos, portanto, quais são as idéias-fôrças da Matemática nova.

A meu parecer, são três, já entre si mais interrelacionadas do que se julga. Vou enunciá-las na ordem em que as considerarei. São a *topologia*, outra teoria de denominação ainda incerta, que vou chamar de *axiomática*, e enfim a *lógica moderna*, expressão, esta última, na qual incluo, tam-

bém, o que, às vèzes, está indicado com os nomes de meta-matemática, semântica, sintaxe lógica, etc.

Vamos, então, procurar explicar, para começar, o que é como surgiu a *topologia*.

* * *

Já disse que o cálculo infinitesimal, tal qual surgiu da mente de Newton e de Leibniz, tinha grandes deficiências.

Era pouco mais do que um conjunto de regras empíricas, às quais faltava uma satisfatória justificação lógica; nada, portanto, mais afastado do ideal euclidiano. O fato de que, por meio dêste cálculo, fôsse possível submeter à exata medida vários fenômenos naturais e achar resultados as mais das vèzes satisfatórios, fêz, no comêço, esquecer as fraquezas dos fundamentos.

Até grandes matemáticos, como Euler e o próprio Lagrange, usaram, no século XVIII, métodos de demonstração que agora seriam inaceitáveis.

As primeiras tentativas de dar à teoria uma base segura não tiveram, neste período, bom êxito achondo-se os cientistas ocupados, principalmente, com a pesquisa físico-matemática; e foi-se ao extremo até mesmo de procurar uma justificação na metafísica ou na teologia. “*Métaphysique du Calcul Infinitésimal*” é o título, por si mesmo bastante significativo, de uma destas tentativas. Coisa estranha, naquele século ultra-racionalista, e clara indicação de que os homens, quando não encontram uma explicação razoável para os fenômenos, a procuram invariavelmente no irracional ou no místico.

Mas, as inderrogáveis necessidades lógicas do espírito humano deviam, necessariamente, acabar por provocar uma reação. Um dos primeiros a protestar contra a situação foi Abel. Também Gauss reconheceu a necessidade de novo rigor na Análise, e o inaugurou. Com Cauchy e Weierstrass, as

bases da nova ciência foram definitivamente postas, e com um nítido rigor que nada deixava a desejar a quanto de mais belo nos tinha sido transmitido pela Antiguidade.

Teve-se assim, depois de um trabalho de dois séculos, finalmente sistematizada a nova Análise, a Análise Infinitesimal, a miragem longínqua de Arquimedes, e em páginas tão nítidas e precisas como as mais belas de Euclides.

O efeito do trabalho crítico de dois séculos, sobre as bases da Análise, foi uma nova corrente de pesquisas das mais ricas de vida da Matemática contemporânea, isto é, justamente a topologia moderna.

Como se verificou isso?

Porque aquêlê trabalho crítico pôs em relêvo um fato de que os primeiros analistas não suspeitavam sequer, isto é, que a base da Análise clássica repousa sobre as propriedades do contínuo, conceito, êste último, sobre o qual, tempos atrás, nem se tinham idéias claras. Pouco a pouco, chegou, pois, ao primeiro plano, como argumento essencial da Matemática, o estudo do contínuo, que é base da topologia.

Neste estudo, os conceitos da velha geometria e da análise clássica são intimamente fundidos, numa síntese nova, que os transcende. A teoria das funções de variável real, a teoria clássica dos conjuntos, a teoria dos espaços abstratos, fruto da crítica sobre os fundamentos do cálculo funcional, são tão somente aspectos particulares nesta nova teoria.

Êste último conceito dos espaços abstratos provocou inverossímil extensão do campo da Análise. Pense-se (para dar um exemplo só) que a dimensão dêstes espaços abstratos (até onde pode ser transportado o conceito) pode ser um número infinito, e, como infinito, um cardinal qualquer de Cantor!

Nestes espaços gerais, a propriedades fundamental é, por assim dizer, a maneira como cada ponto está ligado ou associado aos seus vizinhos. Muitas propriedades dos espaços euclidianos vão cair. Pareceria impossível o estudo de entes tão

gerais. Mas, o sistema de definição, que é axiomático, fornece também pontos para o ataque. Quando para tais espaços se postulam poucas propriedades axiomáticas, encontram-se conjuntos patológicos nos quais, por exemplo, pontos distintos podem ser infinitamente vizinhos; espaços de tal natureza são úteis para a crítica dos princípios da Análise. Aquêles que, pelo contrário, têm propriedades mais normais, como os espaços métricos ou de estrutura uniforme, são, como disse, o ambiente mais natural da Análise atual.

Mas, sôbre isso não posso mais alongar-me.

* * *

Passemos agora à axiomática moderna, que, mais que uma teoria, é a maneira típica de encarar as coisas da Matemática atual. Vejamos como nasceu e em que consiste.

A ciência grega nos oferece, nos Elementos de Euclides, o primeiro exemplo de um sistema lógico-dedutivo, que, como disse, exerceu influência fundamental. Neste livro, os conceitos fundamentais da geometria — ponto, reta, plano, etc. — são apresentados como conceitos aos quais a mente chega, agindo por abstração, ao partir de objetos físicos. É o ponto de vista eminentemente platônico. Vendo muitos cavalos, diz Platão, nossa mente alcança o conceito da “cavalinidade”. Euclides faz eco: vendo muitos pequenos grãos de areia, nossa mente alcança o conceito de ponto matemático. Platão chegava a atribuir a estas idéias abstratas como que uma existência separada, no seu supermundo das idéias.

Estas concepções representam, provavelmente, reação e progresso, em confronto com outras anteriores, mais empíricas e grosseiras. Foram, porém, logo depois, consideradas com desconfiança por outros sábios gregos e mais tarde pelo espírito prático dos romanos. Na Idade Média, alcançaram ainda influência entre filósofos e teólogos, mas depois não lograram inserir-se na Matemática moderna.

Aconteceu, com efeito, que desde o começo do século passado a geometria euclidiana deixou de ser o único sistema lógico-dedutivo bem organizado da Matemática e transformou-se num simples membro de bem numerosa família.

Com efeito, outros sistemas foram criados, obedecendo a uma dúplice impulso: *construtivo* e *crítico*.

Fruto do primeiro impulso foi a criação da geometria projetiva e a da geometria descritiva. A primeira foi construída com a organização num sistema lógico das regras empíricas que os pintores italianos do Renascimento tinham excogitado para suas necessidades de representação perspectiva dos objetos; e a segunda, organizando os progressos da engenharia introduzidos na arte de representação de estradas, casas e fortalezas.

Fruto do segundo impulso, o crítico é, pelo contrário, a sistematização da análise, de que já falei, a da aritmética e da álgebra elementar, e a dos números reais e complexos, que agora foi feita.

Substancialmente crítico é também o impulso que derivou da maneira mais humana de encarar os problemas, inaugurada por Abel: em lugar de fazer reiteradas tentativas para resolver um problema difícil, procuremos examinar se o problema é efetivamente solúvel com os meios de que se dispõe. Progresso metodológico substancial!

Este exame sem preconceitos levou a dar respostas certas a *todos* os problemas que os gregos se tinham proposto sem resolver (triseção do ângulo, duplicação do cubo, inscrição no círculo de um polígono regular tendo um número qualquer de lados, quadratura do círculo, etc.), a demonstrar a impossibilidade da resolução pelos radicais da equação algébrica de um grau qualquer e a demonstrar a independência e, portanto, a indemonstrabilidade do postulado de Euclides sobre as paralelas; questões, tôdas essas, que, desde muitos séculos, se tinham transformado em outros tantos quebra-cabeças. E, o

que é ainda mais importante, êste exame sem preconceitos suscitou a construção de teorias novas de grande significado, como por exemplo, a teoria dos grupos e a geometria não euclidiana, originadas justamente pelos dois últimos problemas mencionados.

Criados todos êstes novos sistemas lógico-dedutivos (estamos mais ou menos em 1850), foi então muito fácil aos matemáticos verificar que a coerência lógica e a aplicabilidade dêstes sistemas eram independentes do sentido que tinham os elementos fundamentais; era algo muito importante, especialmente no caso de sistemas geométricos, que os gregos, talvez por causa das concepções platônicas dominantes, não tinham podido compreender.

Conseqüentemente, na geometria euclidiana, por exemplo, as palavras ponto, reta, plano, etc., podem ser substituídas por outros conceitos geométricos ou, também, não geométricos, quando entre êstes novos conceitos possam instituir-se relações formais que correspondam aos postulados da geometria euclidiana, tendo as mesmas propriedades formais dêstes. Esta possibilidade é da maior importância, também prática, porque multiplica a aplicabilidade de uma teoria tantas vezes quantas são as ditas interpretações dadas aos entes fundamentais. Quero acentuar que a lei de dualidade da geometria projetiva pode ser encarada como um caso particularíssimo desta possibilidade.

Põe-se em foco, assim, o verdadeiro caráter íntimo das teorias matemáticas. Em particular, pode-se mostrar que, em muitos casos, questões diversíssimas e teorias pertinentes até aos mais diferentes ramos da Matemática são substancialmente idênticas, porque têm a mesma estrutura lógica.

Se o tempo e a natureza do auditório me permitissem, desceria a exemplos particulares, os quais, se bem que sejam muito elementares, suscitariam, acredito, surpresa da parte dos matemáticos.

Este estado de coisas está caricaturado na conhecidíssima definição chistosa de Russel, de ser a Matemática aquela ciência na qual “não se sabe do que se fala, nem se o que se afirma é verdadeiro”.

Querendo dar-se uma definição não caricatural, mas exata... matematicamente, poder-se-ia corrigir o “não se sabe”, dizendo-se “não precisa saber”. O fato de que “não precise saber” é já uma vantagem, como procurei explicar. A segunda parte de tão humorístico aforisma consiste apenas em afirmar que cada teorema de Matemática começa com um “se”, pois que a Matemática, sendo substancialmente um método, não pode, por si só, conduzir a nenhuma verdade experimental, o que é por demais evidente.

Outra conseqüência não menos notável do exame dos sistemas matemáticos é a possibilidade de construirmos tais sistemas à nossa vontade, isto é, não mais sugeridos pelos modelos físicos do mundo experimental, mas tão somente pelas conveniências da Matemática mesma. A Matemática, pois, liberta-se da Física num sentido mais profundo do que o anterior. Isto é, não somente pode desenvolver-se independentemente da utilidade imediata que suas teorias têm para as investigações da ciência física, mas pode desenvolver pesquisas sobre teorias cujos elementos não tenham referência nenhuma com objetos do mundo físico.

Está claro que essas novas liberdades dão ao matemático a possibilidade de construir numerosas teorias novas que, antes, não existiam, e fazem, pois, sentir o desejo de construir também alguma coisa que traga uma classificação, uma ordem no conjunto das teorias assim construídas.

Este desejo é justamente satisfeito pela moderna axiomática das teorias, a qual institui o estudo destas teorias, conduz, fazendo úteis comparações, à descoberta de princípios generalíssimos comuns a muitas teorias, e permite assim, na construção das teorias matemáticas, grande economia de

pensamento. É, em suma, a teoria das teorias, ou o sistema dos sistemas.

Não posso deter-me aqui em exemplos, o que somente poderia ser feito em aulas dedicadas especialmente à axiomática. Aspectos particulares desta teoria são a teoria dos sistemas matemáticos com uma, duas, três operações, como, por exemplo, respectivamente a dos grupos clássicos, mais ou menos generalizados, diádicos ou poliádicos, a dos anéis e a das álgebras; a teoria das estruturas e a dos sistemas parcialmente ordenados.

Observo só que esta axiomática apresenta o grande merecimento de ter finalmente detido a tendência dispersiva, que há mais de dois séculos dominava incontrastada; gigantesco movimento que parecia inevitável no desenvolvimento da Matemática, em consequência do qual dois pesquisadores de diferentes teorias, apesar de todos os remédios excogitados, como congressos, etc., se arriscavam a não se compreender mais, como irmãos de uma mesma família, mas que falassem línguas diferentes. Não; agora, finalmente, o movimento dessa enorme galáxia de feitos lógicos, que é a Matemática moderna, não é mais dispersivo. A imensa corrente mudou de sentido. E a galáxia mesma tornou-se extraordinariamente mais compreensível. Esta mensagem, manda-a a todos os matemáticos a axiomática moderna.

* * *

Entremos agora, em nosso terceiro assunto: a moderna, interessantíssima lógica matemática. Não faz, propriamente, parte da Matemática, mas lhe é indispensável.

Entre duas ciências pode existir uma relação especial de subordinação, que se verifica quando os resultados da primeira são aproveitados sem discussão pela segunda e se tornam como que parte de seu "método". É o caso da Matemática para com a Física e o da Física ou da Química para com

a Medicina. Nestes casos, a primeira ciência é dita *anterior* à segunda. Torna-se então evidente que a lógica matemática é uma ciência anterior à Matemática.

É claro que os progressos de uma ciência repercutem em tôdas as ciências que a têm como ciência anterior.

Justamente isso está agora acontecendo na Matemática, pela primeira vez em sua história, em consequência de inesperados progressos da lógica matemática.

Vamos, pois, falar desta ligeiramente.

A lógica tem por escopo estudar o método do raciocínio dedutivo. É uma ciência fundada praticamente por Aristóteles, quando êste sábio escreveu as bem conhecidas regras do silogismo. Depois disto, dormiu um sono profundo de 2.000 anos, para despertar um pouco em tempos relativamente próximos de nós, e agora animar-se de uma vida muito interessante.

Leibniz pensou primeiro como teria sido útil inventar um cálculo que reproduzisse com sinais gráficos as leis do pensamento, em ordem a poder verificar a exatidão dos nossos raciocínios. Esse sonho foi, em pequena parte, realizado com o cálculo simbólico da lógica matemática, que, iniciado por Boole, na metade do século passado, se foi depois aperfeiçoando pela obra de De Morgan, Frege, Schröder, Peano, Russel e dos lógicos poloneses, até integrar-se num mais vasto movimento de estudos, na escola de Viena de Carnap e outros.

Os matemáticos viram o despertar desta ciência mais com curiosidade, do que com verdadeiro interêsse. Entretanto, a lógica matemática progrediu de maneira a fazer esperar que também a Matemática irá obter notáveis vantagens.

Quero referir-me, por exemplo, ao teorema, agora famoso, que o lógico Kurt Gödel, do círculo de Viena, descobriu em 1931.

Para explicar em que consiste essencialmente êste teo-

rema, é preciso lembrar as seguintes simples noções sobre os sistemas dedutivos: um sistema dedutivo S é dito *coerente* ou *consistente* ou *não contraditório* quando nunca acontece que uma proposição A , constituída de termos de S , seja verificada juntamente com a proposição contrária — A , obtida negando a A . Noutras palavras: quando, entre as conseqüências do sistema, não podem nunca subsistir contemporaneamente duas proposições, uma contrária à outra. Além disso, um sistema é dito *completo* quando, dada uma proposição A qualquer de termos de S , pelo menos A ou — A é conseqüência do sistema.

Sobre estes assuntos, Gödel demonstrou que o sistema hipotético dedutivo da Aritmética não é completo e que é possível nêle estabelecer proposições que não sejam conseqüências dos postulados, e que são, pois, logicamente indemonstráveis, se bem que seja possível verificar de outro modo, isto é, saindo do sistema, que são verdadeiras.

Existem, portanto, nos sistemas lógicos da Matemática, proposições verdadeiras, sempre verificadas, que não constituem conseqüências dos postulados do sistema.

Este é certamente um resultado muito importante da Matemática moderna, porque põe ainda em discussão o que tem de ser entendido como verdade matemática; conceito que não é mais tão lapalissiano como se pensava tempos atrás.

Conclusão verdadeiramente notável: o método dedutivo pode ser impotente para apresentar tôdas as verdades exprimíveis em termos do sistema e apresenta geralmente só uma parte destas verdades. O demonstrável é só parte do real por íntima e irremediável natureza do sistema. E isso acontece quando o sistema é equivalente ao da Aritmética, ou contém tal sistema.

A lógica matemática ensina isto, agora, aos matemáticos, e não é exagêro dizer que Aristóteles e Euclides, os fundado-

res do método dedutivo, se sentiriam profundamente surpresos com tal resultado.

Não é êste o lugar nem o momento de fazer previsões sobre assuntos modernos e delicados, sobretudo pela impossibilidade de consultar os trabalhos originais. Isso não impede, porém, de observar que o campo da Matemática, no qual subsiste o teorema de Gödel, é também aquêle onde se conhecem teoremas, praticamente verdadeiros em campos empíricos vastíssimos, mas que nunca, puderam ser demonstrados logicamente, e que se tornaram, pelo contrário, alguns desde séculos, verdadeiros quebra-cabeças. O último teorema de Férmat, e outros parecidos, o problema das quatro côres, etc., pertencem a esta categoria. Será que êstes fatos sejam entre si coligados, e que o teorema de Gödel ou considerações semelhantes poderão jorrar nova luz, ou, talvez, resolver estas questões? Eis aqui uma pergunta interessante, que somente novos estudos poderão esclarecer.

* * *

Acabei a prometida resenha. Mas, já antecipei que desejo acrescentar-lhe algumas considerações de outra natureza.

Como vêem, é êste um momento favorável para que novas energias, novos povos passem a cooperar na construção dêste organismo em perpétua metamorfose, que é a Matemática. Graças à introdução de novas idéias, em grande número, tudo ferve e se transforma. Outrora, os matemáticos estavam à procura de problemas. Agora, problemas novos em grande quantidade, estão procurando... os matemáticos, especialmente jovens, que melhor os tratem e os compreendam.

Permiti, pois, que vos diga: ide, com confiança e em grande número, ao encontro da Matemática. Ela não vos enganará. Ide ao seu encontro sorrindo, porque a vida do pesquisador é bela, alegre e cheia de saúde moral.

Mas, os jovens têm o direito de nos perguntar: "Como e onde?". Porque, cumpre fazer notar, no Brasil ainda não foi criado um Instituto suficientemente bem aparelhado para fazer verdadeira vida de pesquisa na Matemática.

Pois aqui, nesta aula inaugural, eu quero também exprimir o desejo de que a situação venha a modificar-se.

Esta terra, tão bela e generosa, que possui tantos tesouros, ainda não possui aquêle tesouro que é a documentação preciosa dos esforços que a humanidade fêz para elevar-se em seu tão difícil caminho. Faltam ainda, pela razão mesma da juventude do país, bibliotecas, no campo da Matemática, às quais êstes documentos sejam recolhidos, e até onde chegue o eco do que se faz no mundo para o progresso científico na Matemática. Destas bibliotecas, já abundantes na Europa, terá a guerra destruído uma parte. É preciso que agora surjam aqui.

A área geográfica em que se desenvolvem pesquisas matemáticas vai difundir-se e tornar-se planetária. O Brasil não pode deixar de pertencer a esta área.

É oportuno que os estadistas, as instituições, os homens de recursos financeiros sejam advertidos de que sem ciência pura não se faz ciência aplicada, e que sem ciência aplicada, em estilo suficientemente grande, jamais qualquer país pôde dar passos seguros no campo de sua economia. De que a Matemática é uma Deusa generosa, que sempre devolveu a cada país, multiplicados por mil, os presentes dêle recebidos. De que a ciência é a mais prodigiosa criadora de riquezas que jamais o homem teve ao seu serviço. De que os países que mais cuidaram da ciência se tornaram ricos e os outros ficaram mais pobres. De que um país pobre tem que cuidar da ciência porque está necessitado disso, e se é rico, porque o pode fazer. Cada uma das bibliotecas de que falo custaria algumas centenas de milhares de cruzeiros, que cedo, tenho certeza, redundariam para a economia da Nação

em benefícios incalculáveis, incomparavelmente maiores. Estas são, talvez, as razões mais poderosas para convencer os estadistas ou as instituições a contribuir para a formação desses centros de pesquisa.

Mas, não são somente estas as razões. É que, a meu ver, a verdadeira riqueza de um país não se mede somente por fatores econômicos: mede-se pela maneira por que se pode ali desenvolver a vida dos homens, em todos os seus aspectos. O aspecto econômico é, sem dúvida, importante, mas não é o único. Um país muito rico pode ser grandemente prejudicado em suas possibilidades de desenvolvimento, se seus jovens, por mais capazes que sejam, conquanto impelidos pelo desejo de desvendar alguns dos mistérios da natureza, nada possam fazer, pela inexorável falta de meios materiais de pesquisa, contra a qual não podem eles providenciar. Seria mais feliz, então, outro país, de mais modestos recursos, mas no qual nada falte para que seus melhores cidadãos possam viver uma vida espiritual mais rica e bela, vida que, afinal de contas, redunde em proveito de todos.

A verdade, que bem conheço, por estar vivendo perto dos moços, é que não poucos, apesar dos progressos imensos já realizados, se acham ainda infelizmente nas condições descritas e acabam na renúncia no cepticismo ou no desespero.

Pois o que pleiteio é que o Governo e as Instituições, os corações melhores e as inteligências mais altas, reünam esforços para resolver este importante problema: o da pesquisa científica, no campo da Matemática, pelo menos. Esta ciência, não tendo quase ciências anteriores, é uma das mais econômicas, e pode desenvolver-se desde já.

Encorajando o progresso dela, se fará, ao mesmo tempo, obra de amor ao saber, de civismo e de verdadeiro patriotismo. A Pátria muito aproveitará em todos os sentidos: pelas vantagens econômicas que destas instituições surgem; pelo progresso espiritual que permite aos seus cultores; pela

simpatia humana que no mundo sempre suscita o país que sabe doar energias para um escopo tão alto que transcende os limites da própria Pátria e o efêmero da nossa vida cotidiana.

Na velha e agora tão aflita Europa, o mundo latino não deu uma contribuição científica inferior à do anglo-alemão, pelo menos na Matemática. Nas Américas, nos Estados Unidos, despertam-se agora grandes energias. Vamos, pois, iniciar, desde já, coração junto a coração, o nosso trabalho, a fim de que, também no Novo Mundo, nós, latinos, demos a nossa parcela.

* * *

Só uma coisa a mais tenho a dizer-vos, para combater uma dúvida, que o estado presente do mundo efetivamente sugere.

“É bem verdade que a ciência tem melhorado muito nossos conhecimentos e feito o mundo mais rico materialmente, mais desenvolvido tecnicamente. Mas, que vale tudo isso, quando se testemunham acontecimentos como os que nestes anos presenciamos e que tanto o fazem regredir? A ciência não serve para alcançar o maior progresso: o moral. É um fracasso. Se ajuda a criar, ajuda a destruir. É uma ilusão confiar muito nela, é um erro gastar energias para ajudá-la; muito melhor é viver mais simplesmente e confiar em nossos corações, especialmente aqui, onde o sol terno e a natureza amiga inspiram meiguice ao homem mais rude”.

Desejo responder a esta objeção, agora tão comum, e explicar porque, a meu ver, é errada. Nós todos compreendemos as razões dolorosas que a suscitam, mas eu penso que o cepticismo e o desânimo que ela exprime são injustos e têm que ser enérgicamente combatidos. Creio, pelo contrário, que os males atuais não seriam tão grandes se a voz da cultura, de que o espírito científico é parte tão importante, voz augusta,

serena e indicadora de justiça, tivesse sido em tempo mais escutada. E o futuro, parece-me, terá que ser melhor.

Quanto às acusações de ineficiência moral argüidas contra a ciência, penso não seja justo pedir-lhe, no tocante à educação social e interior do homem, que ela alcance em poucas gerações resultado tão extraordinário que as próprias religiões, por sua natureza mais preocupadas com êstes objetivos, não conseguiram em muitos milênios. A meu ver, o progresso moral é lento, porque consiste em modificar instintos profundos. E isso é tão verdadeiro, que as religiões, que mais se ocupam dêle, têm um desenvolvimento, não secular ou decenal, como, por exemplo, os movimentos políticos, mas milenário.

A verdade, creio eu, é diferente. A verdade é que a humanidade é muito jovem, e que a ciência nasceu agora. O primeiro cientista, no sentido moderno da palavra, é talvez Galileu. Dêste homem até nós o lapso é de três séculos. Lapso curto no desenvolvimento da humanidade, que — coisa tão bela de pensar — tem diante de si dezenas e talvez centenas de milênios, que podem ser aproveitados para o seu aperfeiçoamento.

Na Matemática, uma das ciências mais antigas, nossas possibilidades são ainda tão escassas que o método se torna ineficaz no estudo de fenômenos que não sejam de grande simplicidade com respeito aos demais. A maioria das ciências está ainda, provávelmente, por nascer, tão vasto é o campo dos fenômenos que não foram ainda submetidos a sistemática indagação científica; os progressos a serem feitos em tôdas são, sem dúvida, ainda bem grandes, e as ciências que tratam do homem e de temas sociais estão entre as menos desenvolvidas, porque têm que cuidar de coisas complexas, e precisam de muitas ciências anteriores.

É, pois, pensamento de muitos que as ciências nos ensinarão, entre outras coisas, quando forem suficientemente de-

senrolvidas, os meios de alcançar melhor harmonia de vida individual e social que torne mais difíceis os presentes males e mais fácil um razoável bem-estar material e espiritual. Estas são esperanças comuns, que a ciência freqüentemente suscita. Parece-me que a ciência tem, com efeito, particulares razões de confiança. É recém-chegada em relação à filosofia e à religião. Mas, do contacto com a ciência, ambas ganharam, acredito, pelo menos uma percepção mais clara do verdadeiro campo de cada uma. Nem duvido que a ciência possa receber, através destas outras altas atividades do espírito, sugestões e ensinamentos que aumentem seu alcance e finura.

Julgo, porém, necessário lembrar outras razões de fé bem mais seguras, a meu ver, e, sem dúvida, bem mais comovedoras. É que a ciência modifica, transforma e melhora profundamente o próprio ânimo das pessoas que a ela se dedicam.

Levando, por inúmeros anos, tôdas as fôrças do intellecto a estudar coisas para as quais é essencial a cooperação dos outros homens e a herança dos conhecimentos dos nossos predecessores, extingue o instinto expresso pelo antigo e feroz conceito "homo homini lupus", e acende desejos de fraternidade. Dá um senso tão vivo da continuidade histórica da raça humana, que levanta o espírito acima das vicissitudes do momento. A irmanação dos cientistas é, com efeito, tão forte que resiste às mais desfavoráveis contingências, e apenas possível, brilha nas organizações exteriores.

Parecerão óbvias tôdas essas considerações, e estou certo de que o seriam, em contingências normais; mas, agora, tornou-se novamente necessário insistir nelas.

Além disso, a meu ver, a ciência é um dos mais poderosos agentes que o homem tem a seu alcance contra suas próprias desabusadas paixões. Os preconceitos, filhos das paixões, que na vida comum fazem tanto mal, são na ciência tão prejudiciais, que o cientista é forçado a renunciar a êles, e a

confiar pouco em coisas de paixão. O velho Galileu, bom pai de todos os cientistas, sempre admoestava ser fundamental na ciência não fazer objeto de fé o que pode ser objeto de experiência. Olhemos ao redor de nós: que imenso benefício nos daria, também agora, a aplicação, em todos os campos, dêste tão simples aforisma!

Com efeito, não conheço nada que tanto eduque o sentido e o desejo de justiça quanto a prática da ciência. Nada que dê, na contemplação das coisas, uma compreensão mais humana, quase diria, mais paterna do mundo ao redor de nós, e, no trabalho, um maior entusiasmo, que faz do cientista, no ânimo, um eterno moço.

Seja-me lícito elevar um hino a estas possibilidades da ciência, bem vivas, a meu ver, indiscutíveis e atuais e que acabarão, provavelmente, por ser mais benéficas do que todos os benefícios materiais, justamente tão celebrados.

Voltando, pois, à objeção feita: se os males de hoje são tão grandes, não é, torna-se necessário afirmá-lo em alta voz, porque a ciência fracasse, mas, pelo contrário, porque é muito jovem!

Faça-se com que as questões que agitam povos ou classes sociais sejam tratadas com o ânimo que a ciência educa, e quantos problemas dolorosos serão resolvidos, quantos males serão vencidos! Não hesito em dizer que tais problemas somente serão resolvidos e tais males vencidos quando puderem ser tratados com a mentalidade e com o ânimo que a ciência cria e difunde.

Não é exagero dizer que o cientista é, em geral, homem deveras mais bondoso, mais justo e de mais generosidade do que o comum, porque assim, repito, o leva a ser sua própria atividade. Participa êle também dos defeitos humanos, mas, em grau menor. Resolvidas que sejam suas necessidades, quase nunca pede mais. Perseguido, raramente blasfema. É talvez o único tipo humano que desconhece o ódio. Inúmeros

exemplos históricos, inúmeros exemplos atuais, dos quais muitos ainda estou vendo, com comovida veneração, em frente aos meus olhos, bem testemunham isso, e nos reconfortam e animam.

Se me é permitido dar-vos um conselho, a vós jovens, dos quais o futuro depende, deixai que vos diga: amai êste tipo de homem e fazei que possa multiplicar-se. Para melhorar o mundo, um dos meios mais seguros é aumentar o número das pessoas que trabalham na ciência. É talvez o único caminho certo. São uma ínfima parcela agora, também nos países que mais destas coisas cuidam; parcela que, sem receio nenhum, mas com benefício imenso, poderia ser centuplicada.

O mundo será, então, bem melhor e imensamente mais feliz do que o atual, e eliminará suas doenças psíquicas e sociais.

Tende, pois, coragem, amigos. Amai a vida científica, e confiai nela. Nossos filhos e nossos netos serão melhores do que nós.

ACHILLE BASSI