

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
ISSN 0103-2569

**Uma Abordagem Topológica Para a Reconstrução de
Curvas e Superfícies a Partir de
Pontos Não Organizados**

**Helton Hideraldo Biscaro
Antônio Castelo Filho
Luis Gustavo Nonato**

Nº 237

RELATÓRIOS TÉCNICOS



**São Carlos – SP
Ago./2004**

SYSNO	<u>1388.193</u>
DATA	<u> / / </u>
ICMC - SBAB	

UMA ABORDAGEM TOPOLÓGICA PARA A RECONSTRUÇÃO DE CURVAS E SUPERFÍCIES A PARTIR DE PONTOS NÃO ORGANIZADOS

Helton Hideraldo Bísaro

Antônio Castelo Filho

Luis Gustavo Nonato

helton@icmc.usp.br

castelo@icmc.usp.br

gnonato@icmc.usp.br

Universidade de São Paulo - São Carlos, SP
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Departamento de Ciências de Computação e Estatística
Av. do Trabalhador São-Carlense, 400 - Centro. São Carlos - SP Brasil.

Resumo. *Este trabalho apresenta uma nova abordagem para reconstrução de curvas e superfícies a partir de nuvem de pontos. A metodologia aqui apresentada utiliza teoria de Morse discreta e sua principal vantagem em relação às técnicas encontradas na literatura é uma considerável diminuição na quantidade de operações geométricas envolvidas no processo de reconstrução, fato que torna o algoritmo mais rápido e menos sujeito a instabilidades de ordem numérica. Além de descrevermos nossa nova metodologia, este artigo também apresenta comparações com as técnicas mais conhecidas da literatura, bem como garantias teóricas de reconstrução.*

Sumário

1. INTRODUÇÃO	3
2. TRABALHOS CORRELATOS	3
2.1 Trabalhos Correlatos Bidimensionais	3
2.2 Trabalhos Correlatos Tridimensionais	4
3. CONCEITOS FUNDAMENTAIS	5
4. RECONSTRUÇÃO DE CURVAS	6
4.1 Garantias Teóricas	8
4.10 Resultados	10
5. RECONSTRUÇÃO DE SUPERFÍCIES	11
5.1 Algoritmo	12
5.2 Resultados Computacionais	14
6. Garantias Teóricas	14
6.1 Homeomorfismo	15
7. CONCLUSÕES E ATIVIDADES FUTURAS	22
7.1 Agradecimentos	22

Lista de Figuras

1	Reconstrução de um pato. a) arestas na $Im(V)$; b) arestas críticas; c) Curva final.	7
2	Arestas incidentes a uma amostra	8
3	Aresta na $Im(V)$	9
4	Proposição 4.8	10
5	Reconstrução do mapa do Brasil: a) Conjunto de amostras; b) Nosso algoritmo; c) Crust; d) Power-Crust; e) Beta-skeleton	11
6	Instabilidade numérica do Power-Crust	12
7	Tetraedro Sliver	13
8	(Dey et al., 2001) Etapa de extração da variedade	14
9	a) Cavalo b) Nó c) Coelho d) Dragão	15
10	(Adamy et al., 2000) (a). umbrella, (b) e (c) são contra-exemplos.	16
11	Vizinhança de uma amostra.	17
12	Prova do Lema 6.11	18
13	Prova do Lema 6.13	19
14	Demonstração do lema 6.16	21

1. INTRODUÇÃO

O problema de se obter uma aproximação linear por partes a partir de amostras de uma curva (ou superfície) tem sido foco de recente pesquisa em modelagem geométrica, influenciando diversas aplicações, como geração de malhas para simulações de escoamento de fluidos em domínios complexos, visualização de conjuntos complexos de dados e muitas outras. Este problema também é conhecido na literatura, como reconstrução a partir de nuvem de pontos.

A entrada para este tipo de problema consiste, tipicamente em um conjunto de pontos (nuvem de pontos) gerados a partir de dados extraídos de radares, sondas sísmicas, pontos amostrados em superfícies implícitas e principalmente através de scanners tridimensionais.

Apesar da falta de informações topológicas e geométricas, vários algoritmos têm sido desenvolvidos para resolver tal problema (Amenta and Bern, 1998; Amenta et al., 1998a; Amenta and Choi, 1999; Amenta et al., 2001; Edelsbrunner, 1996; Dey et al., 1999; Giesen, 2002). Embora a maioria dos algoritmos descritos na literatura tenham obtido relativo sucesso, poucos avanços foram feitos no sentido de minimizar a quantidade de cálculos geométricos envolvidos no processo de reconstrução.

Neste trabalho apresentamos uma nova técnica de reconstrução a partir de nuvem de pontos que utiliza conceitos topológicos, ao invés de geométricos na concepção de um novo algoritmo, obtendo uma diminuição considerável no tempo computacional.

A fim de fornecer uma visão geral das técnicas descritas na literatura, a seção dois apresenta, resumidamente, os principais algoritmos dedicados a reconstrução, tanto bidimensionais quanto tridimensionais; a seção três apresenta os conceitos matemáticos fundamentais para o entendimento do restante do texto; a seção quatro descreve um algoritmo de reconstrução de curvas no plano a partir de uma nuvem de pontos, fornece garantias teóricas sobre a reconstrução e apresenta alguns resultados computacionais; a seção cinco descreve a extensão do mesmo algoritmo para o caso tridimensional, mostrando comparações com os principais algoritmos da literatura; a seção seis discute os resultados e aponta os caminhos a seguir em termos de trabalhos futuros.

2. TRABALHOS CORRELATOS

Nesta seção resumiremos os principais algoritmos dedicados à reconstrução a partir de nuvem de pontos, enfatizando suas vantagens e desvantagens. Como nosso algoritmo pode ser adaptado tanto para curvas, como para superfícies, dividiremos esta seção em duas partes; a primeira tratando dos algoritmos bidimensionais e a segunda dos algoritmos tridimensionais.

2.1 Trabalhos Correlatos Bidimensionais.

Em poucas palavras, algoritmos de reconstrução bidimensionais se propõem a encontrar, a partir de um conjunto P de amostras, um polígono (ou um conjunto de polígonos) que aproxima a curva original a partir do qual as amostras foram extraídas. Neste caso, a reconstrução deve conectar as amostras na mesma ordem em que elas estão posicionadas ao longo da curva. Em duas dimensões, existe uma grande quantidade de algoritmos dedicados a este problema.

Uma das primeiras tentativas de reconstruir curvas (e superfícies) a partir de uma nuvem de pontos foi o algoritmo α -shape de Edelsbrunner and Mücke (1994). Começando com a triangulação de Delaunay do conjunto de amostras, o α -shape remove todos os simplexes que não estão contidos em uma esfera vazia de amostras de raio α . Embora o α -shape seja simples de implementar, ele só funciona bem para conjuntos uniformemente amostrados, uma vez que o mesmo valor de α é aplicado em todo o conjunto de pontos.

Da mesma forma que o α -shape, o algoritmo β -skeleton (Kirkpatrick and Radke, 1985)

extrai os polígonos que se ajustam ao conjunto de pontos usando esferas vazias e a triangulação de Delaunay. Nesta abordagem, regiões proibidas definidas através de esferas vazias fornecem a aproximação poligonal da curva. O β -skeleton, que é definido apenas no caso bidimensional, é muito simples de implementar, mas apresenta as mesmas desvantagens do α -shape.

O primeiro algoritmo a apresentar uma reconstrução satisfatória e com garantias teóricas foi o Crust de Amenta et al. (1998a). Sob uma taxa de amostragem adequada, ele assegura que é possível construir uma aproximação poligonal correta para uma curva fechada usando, além das amostras, os vértices de Voronoi calculados a partir destes pontos. O Crust funciona para conjuntos de pontos que não são uniformemente amostrados, reduzindo a intervenção do usuário durante o processo de reconstrução. A instabilidade dos cálculos geométricos necessários para calcular os vértices de Voronoi é a principal desvantagem desta técnica. Além disso, o algoritmo deve construir duas triangulações de Delaunay, uma para calcular os vértices de Voronoi e outra para gerar o Crust, aumentando o custo computacional. Outra contribuição apresentada em Amenta et al. (1998a) é um melhoramento no algoritmo β -skeleton, estabelecendo uma fundamentação teórica que assegura, para um valor específico de β , uma reconstrução correta.

O Power Crust (Amenta et al., 2001), um aprimoramento do algoritmo Crust, emprega um tipo de diagrama de Voronoi com pesos, chamado Power diagrama, para calcular uma aproximação linear por partes de uma curva suave. O Power Crust também apresenta garantias teóricas de gerar uma reconstrução correta, apresentando resultados melhores que os do Crust. Um problema com o Power Crust é a instabilidade numérica dos cálculos geométricos realizados no Power diagrama. Na prática, diferentes resultados podem ser obtidos quando perturbações são aplicadas às amostras, caracterizando instabilidade do método.

Baseado no Crust, Dey et al. (1999) apresentam um algoritmo que reconstrói tanto curvas fechadas quanto arcos. Embora este algoritmo exija uma taxa de amostragem menos rígida, ele pode não assegurar a reconstrução correta do objeto original. Outra desvantagem desse método é a grande quantidade de testes geométricos realizados por ele, além da triangulação de Delaunay, o algoritmo faz um refinamento em um grafo de Gabriel, o qual utiliza muitas operações geométricas.

O primeiro trabalho a garantir a reconstrução correta para curvas não suaves é apresentado em Giesen (1999), que assegura a correta reconstrução utilizando o algoritmo do caixeiro viajante, o que torna essa abordagem computacionalmente muito cara. Althaus and Mehlhorn (2000) melhoraram o algoritmo de Giesen mostrando que, sob uma taxa de amostragem adequada, o problema do caixeiro viajante pode ser resolvido em tempo polinomial.

2.2 Trabalhos Correlatos Tridimensionais

Nos últimos anos, o problema de reconstrução tridimensional tem recebido crescente atenção, tanto de pesquisadores da área de Computação Gráfica, quanto de pesquisadores da área de Geometria Computacional.

O problema se tornou conhecido através do artigo de Hoppe et al. (1992), o qual apresenta um algoritmo que reconstrói a superfície como o conjunto de zeros de uma função distância com sinal. Esta abordagem não consegue capturar detalhes finos da superfície. Curless and Levoy (1996) apresentaram uma extensão deste algoritmo capaz de capturar tais detalhes, no entanto, o algoritmo utiliza informações adicionais, além das amostras.

Recentemente, pesquisadores da área de Geometria Computacional têm baseado seus algoritmos em triangulação de Delaunay. A idéia central dessa classe de algoritmos é partir de um complexo simplicial gerado pela triangulação de Delaunay das amostras e, de alguma forma, "esculpir" esse complexo simplicial até obter uma reconstrução satisfatória da superfície original. Estes algoritmos são conhecidos na literatura como algoritmos de esculpimento.

Boissonnat (1984) apresentou o primeiro algoritmo de esculpimento conhecido. Seu algoritmo elimina tetraedros e triângulos que violam um critério pré-estabelecido. Entretanto, este algoritmo funciona apenas para superfícies de genus zero e, além disso, possui um custo computacional muito elevado ($N^2 \log N$, segundo o próprio autor).

O algoritmo α -shape de Edelsbrunner and Mücke (1994) possui sua versão tridimensional, porém, como na versão bidimensional, é extremamente dependente do parâmetro α , o que o torna útil apenas para amostragens com densidade uniforme. Teichmann and Capps (1998) apresentaram uma extensão do α -shape que varia automaticamente o valor de α de acordo com a densidade da amostragem. Entretanto, esta abordagem necessita dos vetores normais nas amostras e, além disso, nenhuma garantia teórica sobre a reconstrução é apresentada.

Amenta and Bern (1998) apresentaram o primeiro algoritmo tridimensional com garantias teóricas. Tal algoritmo é uma extensão do Crust bidimensional. Além das duas triangulações de Delaunay, necessárias para gerar o Crust, essa abordagem ainda necessita calcular os pólos, isto é, os vértices de Voronoi que estão mais próximos do eixo medial, o que acaba gerando mais instabilidade numérica. Posteriormente Amenta et al. (2002) apresentaram uma elegante simplificação deste algoritmo. Esta nova abordagem é chamada de Cocone e necessita de apenas uma triangulação de Delaunay para gerar a reconstrução, e ainda preserva as mesmas garantias teóricas do Crust. Na prática, o Cocone gera buracos indesejáveis no objeto reconstruído. Para solucionar este problema, o algoritmo Tight Cocone (Dey and Goswami, 2003) foi desenvolvido. Fortemente baseado no Cocone, o Tight Cocone consegue gerar uma superfície sem buracos, entretanto, não consegue capturar mais de uma componente conexa. O Power Crust (Amenta et al., 2001) também possui sua versão tridimensional, com as mesmas vantagens e desvantagens da versão bidimensional.

Edelsbrunner usa a teoria de Morse clássica, isto é, para o caso contínuo, para obter um algoritmo de reconstrução de curvas (superfícies) a partir de nuvem de pontos (Edelsbrunner, 1996). Embora a técnica de Edelsbrunner tenha uma fundamentação topológica, a topologia é usada apenas para deduzir os cálculos geométricos executados pelo algoritmo. Outra desvantagem dessa metodologia é não apresentar garantias teóricas de uma reconstrução correta. Essas duas características distinguem esta abordagem da nossa, a qual propõe um algoritmo de reconstrução baseado em teoria de Morse discreta e emprega ferramentas topológicas não apenas no passo inicial, mas em todo o processo. Nossa abordagem evita cálculos geométricos durante o processo de reconstrução, tornando-o mais simples, mais rápido e mais robusto. Adicionalmente, provamos para o caso bidimensional que, sob uma taxa de amostragem adequada, nosso algoritmo produz uma correta reconstrução do objeto original.

3. CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Esta seção introduz os conceitos básicos e a terminologia usada no restante do texto.

Seja C uma curva suave e fechada em $\mathbb{R}^2$. O conjunto dos centros de esferas vazias tocando pelo menos dois pontos de C é chamado de *eixo medial*. O *local feature size* de um ponto p em C , denotado $lfs(p)$, é a distância de p até o eixo medial de C . Um conjunto finito de pontos $S \subset C$ é uma *r-amostragem* se a distância de qualquer ponto $p \in C$ até o ponto mais próximo de S é no máximo $r \times lfs(p)$. Neste caso, diz-se que C é *r-amostrada*.

Observação 3.1 *As mesmas definições acima valem para superfícies fechadas e suaves em $\mathbb{R}^3$.*

Duas amostras a e b de S são ditas adjacentes se e somente se existe um arco de C o qual não contém pontos de S além de a e b .

Dado um conjunto de pontos S em $\mathbb{R}^n$, uma *triangulação* de S é um complexo simplicial n -dimensional K cujos vértices são pontos de S e a união dos simplexes em K é o fecho convexo

de S . Se o circuncirculo de cada simplexo de K não contém pontos de S em seu interior, K é chamado de *triangulação de Delaunay*.

Seja K um complexo simplicial e $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real definida em K . f é dita ser uma *função de Morse discreta* (Forman, 2002) se para todo simplexo d -dimensional $\sigma \in K$:

$$\begin{aligned} \#\{\beta \supset \sigma \mid f(\beta) \leq f(\sigma)\} &\leq 1 \\ \#\{\gamma \subset \sigma \mid f(\gamma) \geq f(\sigma)\} &\leq 1 \end{aligned} \quad (1)$$

onde β é um simplexo $(d+1)$ -dimensional contendo σ , γ é um simplexo $(d-1)$ -dimensional contido em σ e $\#$ é o símbolo que representa o número de elementos de um determinado conjunto.

A definição acima diz que uma função de Morse discreta deve associar valores mais altos a simplexos de maior dimensão com no máximo uma exceção a cada simplexo.

Outro importante conceito presente em nossa abordagem é o de simplexo crítico. Um simplexo d -dimensional $\sigma \in K$ é *crítico* se

$$\begin{aligned} \#\{\beta \supset \sigma \mid f(\beta) \leq f(\sigma)\} &= 0 \\ \#\{\gamma \subset \sigma \mid f(\gamma) \geq f(\sigma)\} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Em outras palavras, isto significa que, na “vizinhança” de σ , a função de Morse discreta é crescente com relação a dimensão.

Observe que simplexos regulares (um simplexo é dito regular se ele não é crítico) aparecem em pares, isto é, se σ é um simplexo regular d -dimensional então ou existe um simplexo $(d+1)$ -dimensional $\beta \supset \sigma$ tal que $f(\beta) \leq f(\sigma)$ ou existe um simplexo $(d-1)$ -dimensional $\gamma \subset \sigma$ tal que $f(\gamma) \geq f(\sigma)$. Dado uma função de Morse discreta f , denotamos o par formado por dois simplexos σ e β , $\sigma \subset \beta$ por $(\sigma, \beta)_f$.

Uma importante propriedade provada em Forman (2002) é que um simplexo regular forma um par com apenas um simplexo, isto é, os pares $(\sigma, \beta)_f$ e $(\gamma, \sigma)_f$, onde $\beta \supset \sigma \supset \gamma$ não existem simultaneamente. É fácil ver que simplexos críticos não formam par com nenhum outro simplexo.

Sejam V e E os conjuntos de vértices e de arestas de um complexo simplicial K e seja f uma função de Morse discreta definida sobre K . O conjunto $Im(V) = \{e \in E \mid \exists v \in V \text{ e } (v, e)_f\}$, chamado de *campo gradiente nos vértices*, desempenha um papel essencial em nosso algoritmo. $Im(V)$ é o conjunto de arestas regulares associados aos vértices regulares e, como mostraremos na seção seguinte, usando uma função de Morse apropriada, $Im(V)$ gera uma primeira aproximação poligonal para a curva C .

Da mesma forma, considere E e F os conjuntos de arestas e de triângulos de um complexo simplicial K . Chamaremos de $Im(E) = \{t \in F \mid \exists e \in E \text{ e } (e, t)_f\}$ o campo gradiente nas arestas. Este campo gradiente também terá um papel importante em nosso algoritmo tridimensional.

4. RECONSTRUÇÃO DE CURVAS

Como mencionamos anteriormente, o algoritmo de reconstrução aqui proposto é baseado em teoria de Morse discreta. A idéia deste algoritmo é obter a aproximação poligonal de uma curva por meio da análise das arestas críticas e regulares para uma determinada função de Morse definida sobre a triangulação de Delaunay das amostras.

Antes de apresentarmos o algoritmo propriamente dito, definiremos formalmente a função de Morse discreta empregada nesta técnica.

Sejam S um conjunto de amostras de uma curva fechada e suave $C \subset \mathbb{R}^2$, DT a triangulação de Delaunay de S , e $l(e)$ o comprimento de uma aresta $e \in DT$. Sejam também V , E e T o

conjunto de vértices, arestas e triângulos de DT , respectivamente. Definimos uma função de Morse discreta $f : DT \rightarrow \mathbb{R}$ como segue:

1. para cada triângulo $t \in T$, $f(t) = \max\{l(e) \mid e \subset t\}$
2. para cada aresta $e \in E$, $f(e) = l(e)$.
3. para cada vértice $v \in V$, $f(v) = \min\{l(e) \mid v \in e\}$.

É fácil ver que a definição acima satisfaz as propriedades de função de Morse discreta (ver a definição (1)). Os possíveis valores ambíguos, que poderiam aparecer em triângulos isósceles ou equiláteros são eliminados por uma pequena perturbação em $l(e)$.

Um fato interessante derivado da definição acima é que os vértices de S ou são críticos ou formam pares com arestas de DT de tal forma que $Im(V)$ é o conjunto das “menores arestas” em DT . Como veremos, embora essenciais, estas arestas não são suficientes para garantir a reconstrução correta do objeto original, de forma que, além da $Im(V)$, usaremos algumas arestas críticas, como mostrado no seguinte algoritmo:

Algoritmo 1 Reconstrução de curvas

(Para um conjunto S de amostras)

1. Calcule a triangulação de Delaunay de S .
 2. Defina a função de Morse discreta f como descrevemos anteriormente.
 3. Calcule $Im(V)$.
 4. Para cada amostra s contida em apenas uma aresta de $Im(V)$, calcule a menor aresta crítica incidente em s . Seja E_c o conjunto de todas estas arestas críticas.
 5. Retorne $G = E_c \cup Im(V)$
-

O conjunto de arestas G retornado pelo algoritmo 1 é a reconstrução poligonal da curva suave C . Como na seção 3., assumimos que a curva suave original C é uma curva fechada simples, a aproximação poligonal G também deve ser simples (sem auto-intersecções) e fechada.

A figura 1 mostra o resultado do algoritmo. A figura 1a) apresenta o conjunto de arestas regulares, isto é, as arestas em $Im(V)$. As arestas críticas que completam a reconstrução são mostradas nas figuras 1b) e a reconstrução completa na figura 1c).

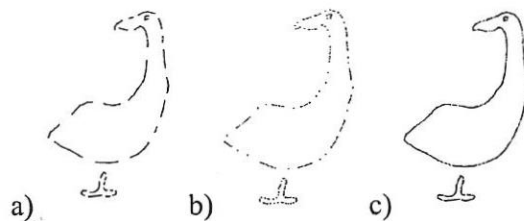


Figura 1: Reconstrução de um pato. a) arestas na $Im(V)$; b) arestas críticas; c) Curva final.

Observe que este procedimento não é equivalente a tomar as duas menores arestas incidentes em cada amostra. Na figura 2, onde as flechas representam o campo vetorial em cada aresta, pode ser visto que a segunda menor aresta incidente à amostra p não faz parte da reconstrução e não é capturada pelo algoritmo porque não é uma aresta crítica.

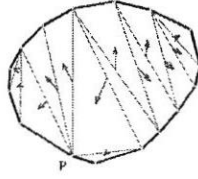


Figura 2: Arestas incidentes a uma amostra

A complexidade computacional do algoritmo 1 é dominada pela triangulação de Delaunay, uma vez que a função de Morse discreta e os elementos críticos e regulares podem ser computados em $\Theta(n)$, onde n é o número de amostras.

A seguir discutiremos a demonstração de que, sob uma taxa de amostragem adequada, G é na verdade, uma correta reconstrução da curva original C .

4.1 Garantias Teóricas

Com objetivo de garantir a correta reconstrução poligonal, assume-se que o conjunto de amostras P é uma r -amostragem de uma curva fechada simples C .

Iniciamos a seção estabelecendo três resultados demonstrados em Amenta et al. (1998a).

Lema 4.2 (Amenta et al., 1998a) *Seja C uma curva fechada suave em $\mathbb{R}^2$. Qualquer disco B que intersecta C em pelo menos duas componentes conexas contém pelo menos um ponto do eixo medial de C .*

Lema 4.3 (Amenta et al., 1998a) *Seja C uma curva suave e r -amostrada em $\mathbb{R}^2$ com $r < 1$. O ângulo entre três amostras adjacentes é pelo menos $\pi - 4 \arcsin(r/2)$.*

Teorema 4.4 (Amenta et al., 1998a) *A distância de um ponto p em uma curva suave r -amostrada C até a reconstrução poligonal de C é no máximo $(\frac{r^2}{2}) lfs(p)$.*

O lema seguinte apresenta uma importante propriedade que relaciona a distância entre amostras e seus respectivos lfs .

Lema 4.5 $lfs(p) \leq lfs(q) + l(\overline{pq})$ para quaisquer dois pontos p e q em P .

Demonstração. seja $\tilde{q}$ o ponto do eixo medial tal que $lfs(q) = l(\overline{q\tilde{q}})$, segue que $lfs(p) \leq l(\overline{p\tilde{q}}) \leq lfs(q) + l(\overline{pq})$. ■

Lema 4.6 *Seja $e = \overline{ab}$ uma aresta conectando duas amostras adjacentes a e b . Se $r < 1$ então $l(e) \leq \frac{2r}{1-r} lfs(a)$.*

Demonstração. O bissetor perpendicular de e intersecta C em pelo menos dois pontos. Seja p o ponto de intersecção contido no arco de C definido por a, p , e b e que não contém nenhum outro ponto de P além de a e de b .

Seja B o disco centrado em p com raio $l(\overline{pa}) = l(\overline{pb})$. B intersecta C ou em apenas uma componente conexa ou em mais de uma componente. Se ocorrer a intersecção em mais de uma componente, pelo lema 4.2, o raio de B deve ser maior do que o $lfs(p)$, dessa forma, $l(\overline{pa}) \geq lfs(p)$, contrariando a condição de r -amostragem. Assim, $B \cap C$ gera apenas um arco

de C . Pelo lema 4.5 temos $lfs(p) \leq lfs(a) + l(\overline{pa}) \leq lfs(a) + r \times lfs(p)$, então $lfs(p) \leq \frac{lfs(a)}{1-r}$. O lema segue desde que $l(e) \leq 2r \times lfs(p)$. ■

Proposição 4.7 *Seja $e = \overline{ab}$ uma aresta de DT tal que b é a amostra mais próxima adjacente a a . Se $r < \frac{1}{3}$ então $e \in Im(V)$.*

Demonstração. Seja p como na demonstração do lema 4.6. Sem perda de generalidade, podemos assumir $lfs(p) = 1$. O teorema 4.4 assegura que a distância de p até e é no máximo $\frac{r^2}{2}$, desta forma, $l(e) \leq 2r\sqrt{1 - \frac{r^2}{4}}$. A bola B' centrada em a com raio $l(e)$ não contém pontos de P em seu interior além de a e b . De fato, se existir uma amostra c no interior de B' , ou c é adjacente a b ou c pertence a um arco de C intersectado por B' . No primeiro caso o ângulo definido por abc é menor que $\pi/2$, contrariando o lema 4.3. Se c pertence a um arco de C , pelo lema 4.2, B' contém pelo menos um ponto do eixo medial de C em seu interior. Note que a distância de p até a é menor do que $r \times lfs(p) = r$ e que $r + l(e) = r + 2r\sqrt{1 - \frac{r^2}{4}} < 1$, dessa forma, B' está contida na bola unitária centrada em p (figure 3), que não contém pontos do eixo medial em seu interior. Então, e é a menor aresta incidente à a , assegurando que $e \in Im(V)$.

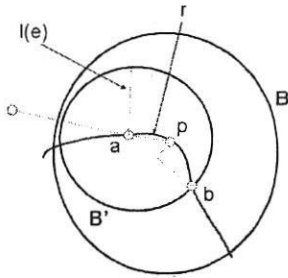


Figura 3: Aresta na $Im(V)$

A proposição acima é extremamente importante, desde que ela assegura que cada amostra se conecta, através de seu campo vetorial, com sua amostra adjacente mais próxima. Além disso, a proposição garante também que toda amostra está contida em pelo menos uma aresta na $Irr(V)$.

A próxima proposição é o ingrediente final para assegurar a reconstrução correta fornecida pelo nosso algoritmo.

Proposição 4.8 *Seja $e = \overline{ab}$ uma aresta conectando duas amostras em uma curva suave r -amostrada C , com $r < \frac{1}{3}$. Se $e \notin \text{Im}(V)$ então e é uma aresta crítica de f . Além disso, e é a menor aresta crítica incidente tanto em a quanto em b .*

Demonstração. Suponha que $e \notin \text{Im}(V)$ não é uma aresta crítica, isto é, e é a maior aresta de algum triângulo $t \in DT$. Seja c um vértice de t que não é incidente à e e seja B o circuncirculo de t (figure 4). Pelo lema 4.3, sabemos que c não é adjacente nem a a nem a b . Então, B intersecta C em mais de uma componente conexa, logo, pelo lema 4.2, B contém um ponto x do eixo medial de C em seu interior. Como $r < 1$, x deve estar na região

de B entre e e c , dessa forma, $l(e) > lfs(a)$. Como $l(e) \leq \frac{2r}{1-r} lfs(a)$ (lema 4.6), temos $lfs(a) < l(e) \leq \frac{2r}{1-r} lfs(a)$ contrariando a hipótese de $r < \frac{1}{3}$.

Suponha agora que existe outra aresta crítica e' , menor que e , contendo a . A bola que tem e' como seu diâmetro contém um ponto do eixo medial em seu interior, desta forma, $lfs(a) < l(e')$. Como $l(e') < l(e) \leq \frac{2r}{1-r} lfs(a)$, então $r > \frac{1}{3}$, novamente contrariando a hipótese. ■

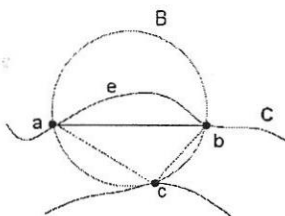


Figura 4: Proposição 4.8

O próximo teorema é uma consequência imediata das proposições 4.7 e 4.8.

Teorema 4.9 *Se $r < \frac{1}{3}$ então as arestas de G conectam exatamente cada par de amostras adjacentes de P .*

É importante notar que amostragem exigida pelo teorema 4.9 é melhor do que as descritas na literatura, tornando nosso algoritmo mais confiável em aplicações práticas, como apresenta a próxima seção.

4.10 Resultados

Nesta seção, apresentamos os resultados do nosso algoritmo quando aplicado em problemas práticos. Também o comparamos com alguns resultados de outros métodos de reconstrução bidimensionais, a saber, Crust, Beta-skeleton, e Power-Crust. Os algoritmos foram implementados em C++ e um conjunto de amostras de um mapa do Brasil foi utilizado como entrada de dados durante as comparações e os testes foram realizados em um processador Intel Pentium III de 1.0 Ghz.

A figura 5 mostra os resultados obtidos com cada algoritmo. O melhor resultado foi obtido pelo nosso algoritmo e pelo Power-Crust, como pode ser visto nas figuras 5b) e d), respectivamente. Como pode ser visto na figura 5c), o algoritmo Crust perde algumas arestas, gerando um conjunto de curvas abertas. O Beta-skeleton retorna uma reconstrução bastante insatisfatória (figura 5e).

A tabela 1 apresenta os tempos de processamento gastos por cada algoritmo. Podemos ver que nosso algoritmo é por volta de quinze vezes mais rápido que o Power Crust, o único, além do nosso, a produzir uma reconstrução satisfatória. Embora o Beta-skeleton tenha apresentado uma performance similar ao nosso, seus resultados foram desastrosos.

Outro fato importante que merece ser mencionado é a instabilidade numérica apresentada pelo Power-Crust. Perturbando alguns pontos próximos da ilha de Marajó (observe a figura 6a)), o Power-Crust conectou o continente à ilha, como mostrado na figura 6b). Com a mesma perturbação, nosso algoritmo ainda produziu uma reconstrução correta, como na figura 5b).

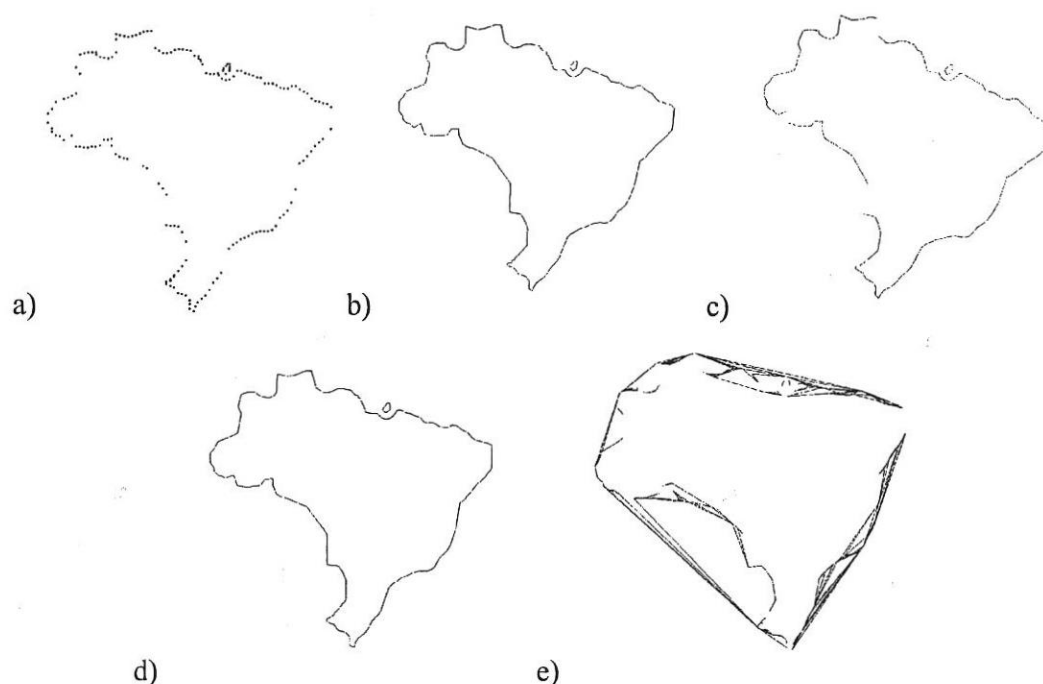


Figura 5: Reconstrução do mapa do Brasil: a) Conjunto de amostras; b) Nosso algoritmo; c) Crust; d) Power-Crust; e) Beta-skeleton

Tabela 1: Tempo de execução dos algoritmos bidimensionais.

Algoritmo	Tempo (s)
Nosso Algoritmo	0,032
Power-Crust	0,484
Crust	0,359
Beta-Skeleton	0,032

Os resultados, tanto teóricos quanto práticos, permitem concluir que a reconstrução utilizando funções de Morse discreta representa um avanço para reconstrução 2D a partir de nuvem de pontos, uma vez que preserva as boas propriedades dos melhores algoritmos, a saber: garantias teóricas, robustez e performance computacional.

5. RECONSTRUÇÃO DE SUPERFÍCIES

Os resultados obtidos no caso bidimensional foram bastante animadores e serviram para nos dar a intuição necessária para a solução do problema tridimensional.

Vários passos foram dados durante a extensão do nosso algoritmo para o caso tridimensional. O principal deles foi decidir qual função de Morse discreta seria mais adequada. Algumas medidas foram testadas como: perímetro, área e $\frac{\text{perímetro}}{\text{razão de aspecto}}$, mas a versão final define a função de Morse nos triângulos como o circunraio dos mesmos, desta forma, cada aresta aponta para a face de menor circunraio o que tem mostrado ótimos resultados práticos.

Um problema encontrado no caso tridimensional, discutido em vários algoritmos da literatura (Amenta and Bern, 1998; Amenta et al., 1998a; Amenta and Choi, 1999; Amenta et al., 2001, 2002) é o uso de uma triangulação de Delaunay robusta e confiável. Optamos pela triangulação de Delaunay encontrada na biblioteca CGAL (2004). A biblioteca CGAL é um

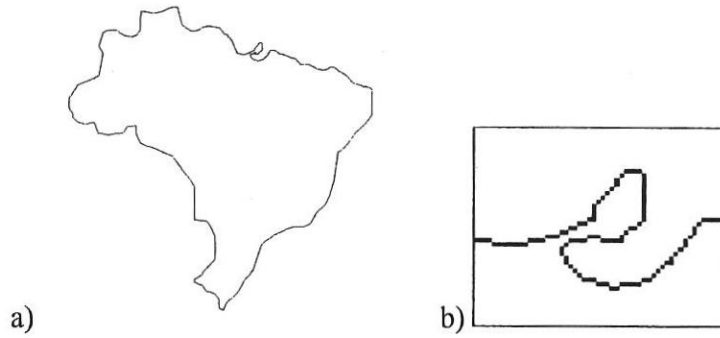


Figura 6: Instabilidade numérica do Power-Crust

conjunto de classes escritas em C++ para a manipulação de estruturas e algoritmos geométricos. Seu objetivo é fornecer estruturas de dados e algoritmos geométricos robustos, confiáveis e fáceis de usar.

Outro problema que merece ser mencionado é o de selecionar as arestas adequadas para a reconstrução. Observe que no caso bidimensional o algoritmo captura as arestas a partir dos vértices (amostras), além disso, todas as amostras fazem parte da curva. Uma extensão natural para este algoritmo seria capturar as faces a partir das arestas. O principal problema desta metodologia é que nem todas as arestas fazem parte do contorno, uma vez que trabalhamos com um complexo simplicial de dimensão três, com vértices, arestas, triângulos e tetraedros. Giesen (2002), em seu trabalho, utiliza as arestas do grafo de Gabriel como aproximação inicial, mas isso representa um cálculo geométrico que tentamos evitar em nossa abordagem. Nossa solução foi partir de um conjunto inicial de arestas, as quais sabemos pertencer a reconstrução da superfície e em seguida ir adicionando arestas a este conjunto à medida que selecionamos as faces pertencente à reconstrução.

5.1 Algoritmo

Descrevemos a seguir o algoritmo desenvolvido para o processo de reconstrução de superfícies em $\mathbb{R}^3$. Exatamente como no algoritmo bidimensional, a idéia deste algoritmo é construir uma aproximação linear por partes de uma determinada superfície M , a partir da análise de faces críticas e regulares de uma específica função de Morse definida sobre a triangulação de Delaunay das amostras.

Antes de apresentarmos o algoritmo propriamente dito, definiremos formalmente a função de Morse utilizada.

Sejam P um conjunto de amostras de uma superfície fechada e suave $M \subset \mathbb{R}^3$, DT a triangulação de Delaunay de P , e $r(t)$ o circunraio de um triângulo $t \in DT$. Sejam também V, E, T e C o conjunto de vértices, arestas, triângulos e células (tetraedros) de DT , respectivamente. Definimos uma função de Morse discreta $f : DT \rightarrow \mathbb{R}$ como segue:

1. para cada célula $c \in C$, $f(c) = \max \{f(t) \mid t \subset c\}$.
2. para cada triângulo $t \in T$, $f(t) = r(t)$.
3. para cada aresta $e \in E$, $f(e) = \min \{f(t) \mid e \subset t\}$.
4. para cada vértice $v \in V$, $f(v) = 0$.

Embora a definição da função de Morse nos vértices não seja relevante para nosso algoritmo, ela é necessária para tornar a teoria correta. Novamente, como no caso bidimensional, os possíveis valores ambíguos podem ser solucionados com uma pequena perturbação em $r(t)$.

Algoritmo 2 Reconstrução de superfícies.

(Para um conjunto P de amostras.)

1. Calcule a triangulação de Delaunay de P .
 2. $N := \emptyset$; $E_p := \emptyset$
 3. Defina a função de Morse discreta f como descrevemos acima.
 4. **Para** cada amostra $p \in P$.
 Calcule a menor aresta e incidente em p e adicione e ao conjunto E_p .
Fim do Para
 5. **Enquanto** houverem arestas não visitadas em E_p **Faça**
 - 5.1 **Para** cada aresta e não visitada em E_p **Faça**
 - 5.1.1 Marque a aresta e como visitada.
 - 5.1.2 **Se** existir $t \in Im(E)$ e contendo e **Então**

$$\left(\begin{array}{l} N := N \cup \{t\} \\ \text{Adicione à } E_p \text{ as arestas de } t \text{ que não estavam em } E_p. \end{array} \right)$$
Fim do Se**Fim do Para**
 - 5.2 **Para** cada aresta e incidente a uma única face $t \in N$ **Faça**

$$\left(\begin{array}{l} \text{Considere a face crítica } t' \text{ de menor circunraio incidente em } e, \text{ tal que } t' \notin N. \\ N := N \cup \{t'\}. \\ \text{Adicione à } E_p \text{ as arestas de } t' \text{ que não estavam em } E_p. \end{array} \right)$$
Fim do Para**Fim do Enquanto**
 6. Retorne N .
-

Outro problema relativamente comum presente em praticamente todos os algoritmos de reconstrução tridimensional que utilizam triangulação de Delaunay, é o problema do aparecimento de tetraedros *sliver*. Um tetraedro *sliver* é um tetraedro com uma razão de aspecto ruim e ainda com um circunraio razoavelmente pequeno. Tal tetraedro é formado por quatro vértices quase igualmente espaçados e próximos ao equador de sua circunsfera como pode ser visto na figura 7.

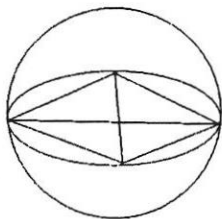


Figura 7: Tetraedro Sliver

O principal problema deste tipo de tetraedro é que ele possui todas as faces quase do mesmo tamanho e, conseqüentemente, é fácil introduzir faces erradas como parte da reconstrução. Dey et al. (2001) argumentam que vários algoritmos de reconstrução, dentre eles o Crust (Amenta et al., 1998a) e o Cocone (Amenta et al., 2002), selecionam um conjunto de faces que são as

“candidatas” à reconstrução, executando em uma etapa de pós processamento a “extração” da variedade. Este pós-processamento trata, entre outras coisas, do problema dos tetraedros sliver. Um exemplo da ocorrência deste problema pode ser observado na figura 8.



Figura 8: (Dey et al., 2001) Etapa de extração da variedade

Nossa solução para este problema foi evitar que ele aconteça durante a execução do algoritmo, evitando assim o pós-processamento. Antes de adicionarmos uma face no conjunto de saída, um teste verifica se acontece alguma situação semelhante a da figura 8, caso isso aconteça, a face não é adicionada.

5.2 Resultados Computacionais

Apresentamos aqui alguns exemplos do nosso algoritmo em funcionamento. Realizamos algumas comparações preliminares com alguns algoritmos encontrados na literatura, a saber, o Crust, o Power Crust, o Cocone e o Tight Cocone. Todos os algoritmos foram implementados em C++ e utilizam a triangulação de Delaunay da biblioteca CGAL. Os algoritmos Crust e Power Crust foram implementados por Gois (2004) como parte de seu projeto de mestrado. Já os algoritmos Cocone e Tight Cocone nos foram gentilmente cedidos por Dey. Os testes foram realizados em um processador Intel Pentium III de 1.0 Ghz.

Escolhemos alguns modelos com grandes quantidades de pontos e medimos o tempo de processamento de cada algoritmo. Desconsideramos o tempo da triangulação de Delaunay, já que ela é passo inicial de todos os algoritmos citados. Os modelos, reconstruídos com o nosso algoritmo, são mostrados na figura 9 e as comparações de velocidades podem ser vistas na tabela 2. Observamos que nosso algoritmo se mostrou mais rápido que todos os outros, com

Tabela 2: Tempo de execução dos algoritmos tridimensionais

<i>Algoritmos→ Modelos↓</i>	Crust	Power Crust	Cocone	Tight Cocone	Nosso Algoritmo
Cavalo (9697 pts)	620,766 s	335,703 s	11,297 s	10,151 s	3,984 s
Nó (13321 pts)	888,765 s	545,979 s	16,594 s	14,266 s	5,563 s
Coelho (35947 pts)	2.258,57 s	1.298,91 s	44,297 s	35,5 s	16,578 s
Dragão (54707 pts)	3.821,13 s	2.279,76 s	82,439 s	60,563 s	27,437 s

qualidade igual ou superior aos demais.

6. Garantias Teóricas

Nosso objetivo aqui é apresentar garantias teóricas para nosso algoritmo de reconstrução tridimensional. Assumimos que $P \subset \mathbb{R}^3$ é uma r -amostragem de uma superfície S e que P

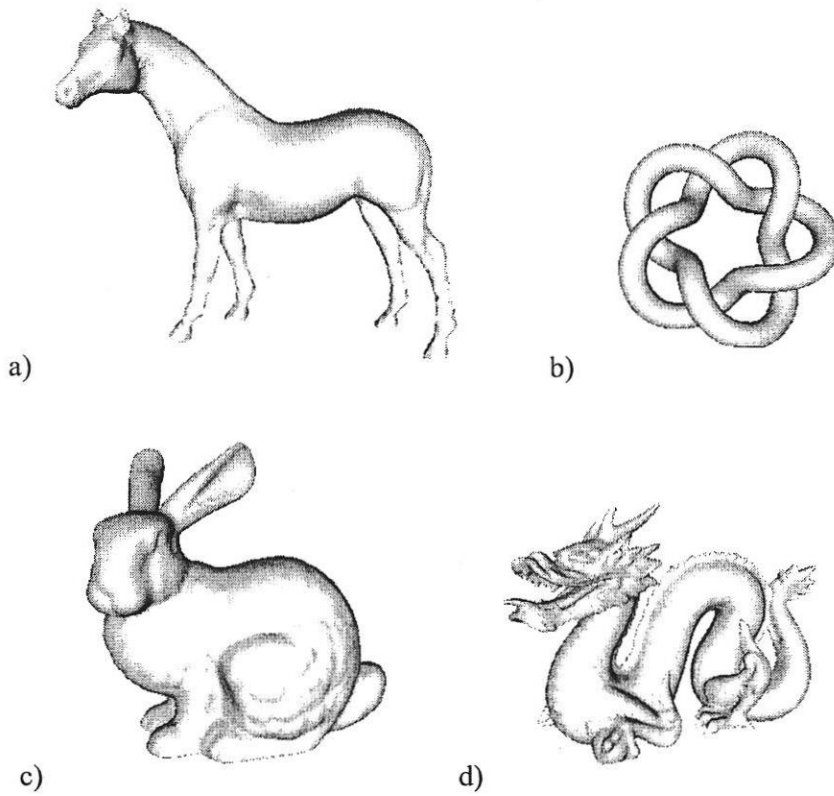


Figura 9: a) Cavalo b) Nó c) Coelho d) Dragão

está em posição geral. Vamos mostrar que o espaço gerado pelas faces capturadas pelo nosso algoritmo é homeomorfo à superfície S .

6.1 Homeomorfismo

Consideraremos S uma superfície suave sem auto-intersecções, P uma r -amostragem de S e $r < 0.1$.

Lema 6.2 (Amenta et al., 1998b) Para quaisquer dois pontos p e q em S com $d(p, q) \leq \rho \min \{lfs(p), lfs(q)\}$, para $\rho \leq \frac{1}{3}$, o ângulo entre as normais à S nos pontos p e q é no máximo $\frac{\rho}{1-3\rho}$.

Lema 6.3 (Amenta et al., 1998b) Seja $p \in P$. $V(p) \cap S$ está contida em uma bola de raio $\frac{r}{1-r} lfs(p)$ centrada em p .

Lema 6.4 (Amenta et al., 1998b) Seja y um ponto qualquer em V_p tal que $d(p, y) \geq \delta lfs(p)$ para $\delta > \frac{r}{1-r}$. O ângulo entre $\vec{y}$ e n_p , onde $\vec{y}$ é o vetor $\vec{py}$ e n_p é o vetor normal à S em p , é menor que $\arcseno\left(\frac{r}{\delta(1-r)}\right) + \arcsen\left(\frac{r}{1-r}\right)$.

Corolário 6.5 (Amenta et al., 1998b) Para qualquer y em V_p tal que o ângulo entre $\vec{y}$ e n_p é maior que $\arcseno\left(\frac{r}{\delta(1-r)}\right) + \arcsen\left(\frac{r}{1-r}\right)$ a $d(y, p) \leq \delta lfs(p)$.

Estes dois últimos resultados dão a idéia de que a célula de Voronoi tridimensional de uma amostra s deve ser "fina" e "comprida".

Teorema 6.6 (Amenta and Choi, 1999) *Seja $r(t)$ o circunraio de um triângulo Delaunay restrito t . Para qualquer vértice p de t , $r(t) \leq \frac{r}{1-r} lfs(p)$.*

Um resultado imprescindível em nossa demonstração é de que as faces capturadas pelo nosso algoritmo tenham circunraio pequeno. Observe que nosso algoritmo captura dois tipos de faces. Faces que são campo vetorial de arestas e faces críticas. Vamos analisar separadamente cada tipo.

Dado um vértice p em um complexo simplicial, uma vizinhança de p é um conjunto de simplexes incidentes a p .

Definição 6.7 (Adamy et al., 2000) *Um umbrella U_p de uma amostra p é uma vizinhança de p homeomorfa a um disco fechado de dimensão 2 e de tal forma que p não faça parte de seu bordo (veja figura 10).*

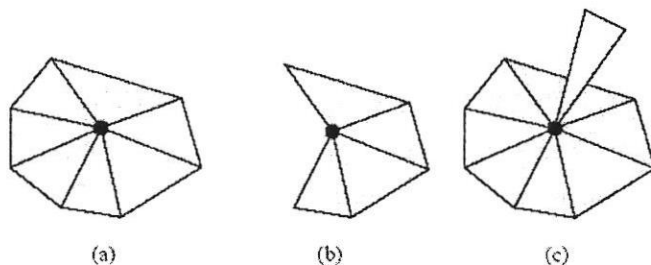


Figura 10: (Adamy et al., 2000) (a). umbrella, (b) e (c) são contra-exemplos.

Observe que, quando $r < 0.1$, U_p aproxima localmente a superfície S em p .

Lema 6.8 *Seja p uma amostra e q sua amostra mais próxima. Para $r < 0.1$ a aresta conectando p e q é Delaunay restrita.*

Demonstração. Suponha por absurdo que $e = \overline{pq}$ não seja Delaunay restrita. Como $r < 0.1$, existe uma superfície N linear por partes composta apenas por triângulos Delaunay restritos e homeomorfa a superfície S . Existe ainda, um umbrella U_p , composto por triângulos Delaunay restritos, que é homeomorfo à uma vizinhança de p em S (veja figura 11). Como e não é Delaunay restrita, ela não pertence a nenhum triângulo de U_p , no entanto, todas as arestas que contém p e pertencem aos triângulos de U_p tem comprimento de no máximo $\frac{2r}{1-r} lfs(p)$, pois este é limitado pelo circunraio do triângulo. Como e é a menor aresta contendo p , seu comprimento também é menor que $\frac{2r}{1-r} lfs(p)$ e, além disso, ela não conecta p com nenhum de suas amostras adjacentes sobre S . Considere B a bola que tem e como seu diâmetro. B toca a superfície S em pelo menos duas componentes conexas, portanto contém pontos do eixo medial, e além disso, tem raio menor que $\frac{r}{1-r} lfs(p)$, o que contraria a hipótese de r -amostragem para $r < 0.1$. ■

Lema 6.9 *Seja e uma aresta Delaunay restrita e $V(e)$ o seu campo vetorial. Então $V(e)$ é um triângulo com circunraio menor que $\frac{r}{1-r} lfs(p)$ onde p é um vértice qualquer de e .*

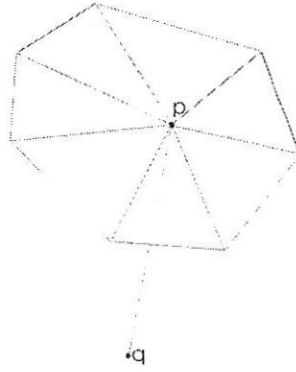


Figura 11: Vizinhança de uma amostra.

Demonstração. Note que, para $r < 0.1$, e possui dois triângulos Delaunay restritos, e portanto com circunraio menor que $\frac{r}{1-r} lfs(p)$. Se $V(e)$ não for nenhum deles, terá circunraio menor do que o circunraio de ambos. ■

Lema 6.10 *Seja e uma aresta Delaunay restita incidente a uma única face $t \in N$ de tal forma que t é campo vetorial de uma de suas arestas. Então a menor face crítica t' incidente em e tem circunraio menor que $\frac{r}{1-r} lfs(p)$ onde p é um vértice qualquer de e .*

Demonstração. A face t incidente em e possui circunraio menor que $\frac{r}{1-r} lfs(p)$. Como $r < 0.1$ existem pelo menos duas faces incidentes em e com circunraio menor que $\frac{r}{1-r} lfs(p)$. Seja f a face de circunraio menor que $\frac{r}{1-r} lfs(p)$ incidente em e e distinta de t . Se f for a face capturada pelo algoritmo, então $f = t'$ e não há nada a provar. Caso contrário, significa que existe uma face crítica t' , com $r(t') < r(f) < \frac{r}{1-r} lfs(p)$ que será capturada pelo algoritmo. ■

Os dois resultados acima, mostram que os dois tipos de faces capturadas pelo nosso algoritmo têm circunraio pequeno. Isto é um fator essencial no restante das demonstrações.

O próximo resultado é bastante semelhante ao resultado de Amenta e Bern que prova que triângulos "pequenos" são "chatos".

Lema 6.11 *Seja p o vértice de um triângulo t com maior ângulo interno e n_p a normal à S em p . Se t possui circunraio menor que $\frac{r}{1-r} lfs(p)$, então seu vetor normal forma um ângulo menor que $\alpha + \arcsen\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sen(2\alpha)\right)$ com n_p onde $\alpha \leq \arcsen\left(\frac{r}{1-r}\right)$.*

Demonstração. Considere as bolas C_1 e C_2 ambas com raio $lfs(p)$ tangentes à S em p , mas uma de cada lado de S . Seja D a bola tendo t em seu plano diametral. Observe que o raio r_a de D é igual ao raio do circuncírculo de t . Os círculos resultantes da intersecção de D com M_1 e M_2 serão denotados por C_1 e C_2 respectivamente (ver figura 12). a reta normal à S em p passa por m_1 , centro de M_1 . Esta normal forma um ângulo menor que α com as normais aos planos de C_1 e C_2 , onde:

$$\begin{aligned} \alpha &\leq \arcsen\left(\frac{r_a}{|pm|}\right) \\ &\leq \arcsen\left(\frac{r}{1-r}\right) \end{aligned}$$

Como este limite superior também é válido para o plano de C_2 , segue os planos de C_1 e C_2 formam uma cunha (vamos chama-la de W) com um ângulo menor que 2α .

Os vértices de q e s de t não podem estar dentro de M_1 ou M_2 , o que significa que t está completamente contido na cunha W . Considere três planos contendo p ; π_t , o plano de t , π_1 , o plano de C_1 , π_2 , o plano de C_2 . A intersecção de uma esfera unitária centrada em p com os três planos citados acima definem um triângulo esférico uvw que pode ser visto no lado direito da figura 12. onde u, v e w são os pontos de intersecção das retas $\pi_t \cap \pi_2$, $\pi_t \cap \pi_1$ e $\pi_1 \cap \pi_2$ com a esfera unitária. Sem perda de generalidade, podemos assumir que o ângulo $\angle uvw \leq \angle wuv$. Temos os seguintes fatos: O comprimento de arco de wv , que será denotado por $|wv|$ é de pelo menos $\frac{\pi}{3}$ uma vez que p foi assumido que p tinha o maior ângulo interno em t e t está completamente contido na cunha W ; o ângulo esférico $\angle vuw$ não é maior que 2α . De fato, estamos interessados no ângulo esférico $\beta = \angle uvw$ que é também o ângulo diedral entre os planos de C_1 e de t . Utilizando a lei dos senos da geometria esférica temos que $\sin(\beta) = \sin(|uw|) \frac{\sin(\angle vuw)}{\sin(|wv|)} \leq \sin(|uw|) \frac{\sin(2\alpha)}{\sin(|wv|)}$. Se $\frac{\pi}{3} \leq |wv| \leq \frac{2\pi}{3}$, temos $\beta \leq \arcsen\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(2\alpha)\right)$. Por outro lado, se tivermos $\frac{2\pi}{3} < |wv| < \pi$, usamos o fato de que $|wv| + |uw| \leq \pi$ desde que $\angle vuw \leq 2\alpha < \frac{\pi}{2}$ para um r suficientemente pequeno. Neste caso, $\frac{\sin(|uw|)}{\sin(|wv|)} < 1$. Logo, $\beta \leq \arcsen\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(2\alpha)\right)$. ■

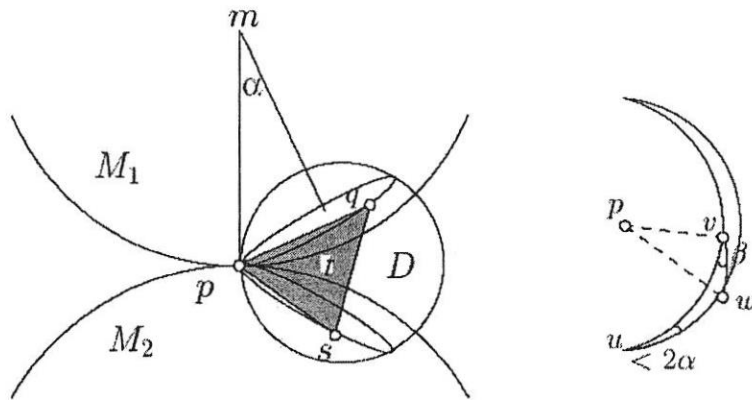


Figura 12: Prova do Lema 6.11

Mostraremos um homeomorfismo entre S e uma variedade linear por partes N formada pelos triângulos “candidatos” capturados pelo nosso algoritmo. Inicialmente vamos definir o homeomorfismo explicitamente por meio de uma função. Primeiro definimos uma aplicação $\mu : \mathbb{R}^3 \rightarrow S$, em seguida consideraremos sua restrição à variedade N . Seja $\mu : \mathbb{R}^3 \rightarrow S$ uma aplicação que leva cada ponto $p \in \mathbb{R}^3$ no ponto mais próximo de S . A restrição de μ à variedade N será denotada por μ_N .

Lema 6.12 A restrição de μ à superfície N é uma função contínua e bem definida

Demonstração. As descontinuidades de μ , como aplicação de $\mathbb{R}^3$ em S , estão exatamente nos pontos do eixo medial. Se algum ponto q tiver mais de um ponto mais próximo sobre a superfície S , q seria um ponto do eixo medial. Mas segue de resultados anteriores que qualquer

ponto $q \in N$ está a uma distância menor que $\frac{r}{1-r} lfs(p)$ de um vértice de triângulo $p \in S$, para $r \leq 0.1$. Como N é uma superfície contínua e evita pontos do eixo medial, μ_N é contínua em N . ■

O próximo passo é mostrar que μ_N é “bem comportada” sobre as amostras e que esse “bom comportamento” se estende para o interior de cada triângulo.

Lema 6.13 *Seja p uma amostra e m o centro de uma bola M de raio $lfs(p)$ tangente à superfície S no ponto p . Nenhum triângulo “candidato” intersecta o segmento pm .*

Demonstração. A fim de intersectar o segmento pm , um triângulo candidato t , assim como sua menor bola vazia de pontos D , teriam que intersectar M . Seja H o plano do círculo onde os bordos de M e D se intersectam. O plano H decompõe a bola M em duas partes disjuntas: $M^+ = M \cap H^+$, $M^- = M \cap H^-$ juntamente com o disco $M \cap H$, onde H^+ e H^- são os dois semi-espacos abertos delimitados por H . Da mesma forma, D também é decomposto por H em D^+ , D^- e $D \cap H$. Segue de um resultado de geometria difrencial que se $M^+ \subset D^+$ então D^+ e M^- estão em lados opostos de H . Sem perda de generalidade, vamos assumir que $M^+ \subset D^+$.

Os vértices de t estão sobre a superfície S e, portanto, não no interior de M , $t \subset D^+$. Como D é Delaunay, p não pode estar no interior de D e portanto $p \notin M^+$. Precisamos mostrar que m também não pertence à M^+ (veja figura 13). De fato, se m estiver em $M^+ \subset D^+$ o raio de D seria de pelo menos $\frac{1}{2} lfs(p')$ contrariando o teorema 6.6. Desta forma, p , m e por consequência o segmento pm estão completamente contidos em M^- provando que H separa t do segmento pm . ■

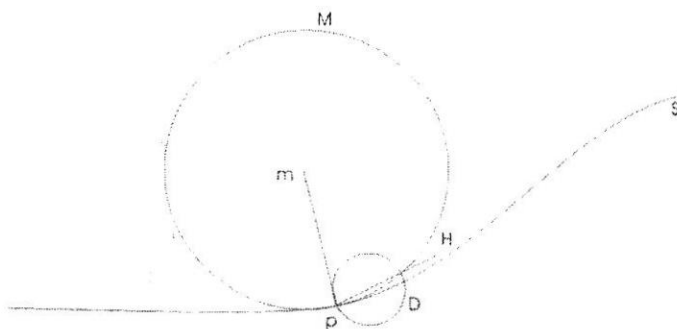


Figura 13: Prova do Lema 6.13

Corolário 6.14 *A função μ_N é injetiva sobre o conjunto P .*

Na sequência mostraremos que, na verdade, μ_N é injetora em todo N . Antes disso, necessitamos de mais um resultado técnico.

Lema 6.15 *Seja q um ponto sobre um triângulo $t \in N$. O ângulo entre n_x , normal à superfície S em $x = \mu_N(q)$, e a normal de t mede no máximo 43.814° para $r < 0.07$*

Demonstração. Seja p o vértice de t com maior ângulo interno. A distância de p até q é no máximo $\frac{2r}{1-r} lfs(p)$. Observe que $\mu_N(q) = x$ é o ponto de S mais próximo de q , logo $d(q, x) \leq \frac{r}{1-r} lfs(p)$. Observe que a distância de p até x é maximizada quando o ângulo $\angle pqx$

é reto. Podemos concluir que $d(p, x) \leq \sqrt{5} \frac{r}{1-r} lfs(p) \leq 0.16831 \times lfs(p)$ para $r \leq 0.07$. Da propriedade Lipschitz de $lfs(\cdot)$ podemos concluir que $lfs(p) \leq 1.2024 \times lfs(x)$. Desta forma $d(p, x) \leq 0.20238 \times lfs(x)$. Aplicando o lema 6.2 para $\rho = 0.20238$ obtemos que o ângulo entre n_x e n_p é de no máximo 29.516° . Pelo lema 6.11 o ângulo entre a normal do triângulo t e n_p é de no máximo 14.298° , para $r < 0.07$ então n_x e a normal de t formam um ângulo de no máximo 43.814° . ■

Da mesma forma que no artigo de Amenta et al. (2002), iremos assumir como hipótese de que dois triângulos adjacentes se encontram em um vértice (ou aresta) comum em um ângulo maior que $\frac{\pi}{2}$. Definimos dois triângulos adjacentes se eles compartilham pelo menos um vértice. Está hipótese tem a função de eliminar variedades com cantos excessivamente agudos.

A demonstração se segue em três passos. Vamos mostrar, em primeiro lugar, que μ_N induz um homeomorfismo em cada triângulo; na sequência, em cada par de triângulos adjacentes e finalmente, em N como um todo.

Lema 6.16 *Seja U uma região contida em um triângulo $t \in N$ ou em triângulos adjacentes de N . A função μ_N define um homeomorfismo entre U e $\mu_N(U) \subset S$.*

Demonstração. Sabemos que μ_N é contínua e está bem definida em U , portanto, basta mostrar que μ_N é injetora. Vamos mostrar, em primeiro lugar, que μ_N é injetora em um triângulo t . Suponha que existam dois pontos, q e $y \in t$ com $\mu_N(y) = \mu_N(q)$. Os pontos q , $\mu_N(q)$ e y são colineares e estão na reta suporte do vetor normal à S em $\mu_N(q)$, caso contrário, haveria uma violação na condição de de r -amostragem. Como t contém o segmento de reta entre q e y isso contradiz o lema 6.15.

Agora vamos considerar o caso em que U não está completamente contido em um único triângulo. Suponha, por absurdo, que existam dois pontos q e y em U tais que $\mu_N(y) = \mu_N(q) = x$ e seja v um vértice comum aos triângulos que contém U . Desde que μ_N é injetora em um único triângulo, significa que q e y estão em triângulos distintos, digamos t_q e t_y . Seja n_x o vetor normal em x . Considere l a reta suporte de n_x . Esta reta deve intersectar a região U pelo menos duas vezes. Se q e y não forem adjacentes ao longo de l basta redefinir q para que isto seja verdade. Consideremos agora, a orientação da região U de acordo com o polo (vértice de Voronoi mais distante) em v . Ou l atravessa N de dentro para fora e volta para dentro, ou de fora para dentro e volta para fora, o que significa que os dois triângulos possuem orientações opostas.

Os ângulos entre as normais dos triângulos t_q , t_y e n_x são de no máximo 43.814° (lema 6.15), isto é, os triângulos são perfurados por n_x quase perpendicularmente. Desde que os dois triângulos possuem orientações opostas, o ângulo entre suas duas normais é de pelo menos $\pi - 87.628$, significando que t_q e t_y se encontram em um ângulo obtuso. Isto contraria a hipótese assumida anteriormente. ■

Terminamos nossa demonstração utilizando um teorema da topologia.

Teorema 6.17 *A função μ_N define um homeomorfismo da triangulação N para a superfície S .*

Demonstração. Considere $\mu_N(N) = S' \subset S$. Vamos, em primeiro lugar, mostrar que (N, μ_N) é um espaço de recobrimento para S' . De maneira informal, podemos pensar que (N, μ_N) é um espaço de recobrimento de S' se μ_N leva N em S' de maneira suave sem nenhuma dobra ou outro tipo de singularidade; Detalhes sobre esses tipos de singularidades podem ser encontrados em Massey (1967), capítulo 5. Mostrar que (N, μ_N) é um espaço de recobrimento

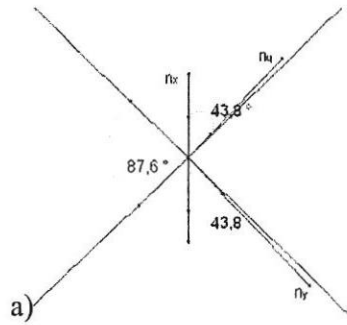


Figura 14: Demonstração do lema 6.16

sobre S' é um resultado mais fraco do que mostrar que μ_N é um homeomorfismo. Um espaço de recobrimento admite, por exemplo, que várias componentes conexas de N sejam levadas na mesma componente conexa de S' . A reta real, por exemplo, é um espaço de recobrimento da esfera S^1 .

Formalmente, (N, μ_N) é um espaço de recobrimento de S' se, para todo $x \in S'$, existe uma vizinhança elementar V_x , conexa por caminhos e contendo x de tal forma que cada componente conexa por caminhos de $\mu_N^{-1}(V_x)$ é levada homeomorficamente em V_x por μ_N .

Vamos construir uma vizinhança elementar de x . Note que o conjunto de pontos $\{\mu_N^{-1}(x)\}$ é não vazio e finito, desde que existe somente um número finito de triângulos em N .

Para cada ponto q em $\mu_N^{-1}(x)$ considere uma vizinhança aberta U_q contendo q e suficientemente pequeno para que U_q esteja contido apenas nos triângulos que contém q .

Afirmamos que μ_N leva U_q homeomorficamente em $\mu_N(U_q)$, uma vez que ela é contínua e injetora (lema 6.16). Seja $U'(x) = \bigcap_{q \in \mu_N^{-1}(x)} \mu_N(U_q)$ a intersecção da imagem de cada um dos U_q . $U'(x)$ é a intersecção de um número finito de conjuntos abertos, portanto ele é aberto e ainda contém x . Podemos extrair de $U'(x)$ um disco V_x contendo x e conexo por caminhos de forma que $\mu_N^{-1}(V_x)$ é um subconjunto de algum U_q , em triângulos adjacentes e, pelo lema 6.16, é injetora. Logo, (N, μ_N) é um espaço de recobrimento de S' .

Mostraremos agora que μ_N define um homeomorfismo entre N e S' . Para isto, basta mostrar que μ_N é injetora. Considere uma componente conexa G de S' . Um teorema da Topologia Algébrica (veja Massey (1967), capítulo 5 lema 3.4) garante que quando (N, μ_N) é um espaço de recobrimento de S' , os conjuntos $\mu_N^{-1}(x)$ para todo $x \in G$ tem a mesma cardinalidade. Usaremos o fato de que μ_N é injetora em toda a amostra (consequência do lema 6.15). Como cada componente conexa de S' contém várias amostras, concluímos que μ_N é injetora em todo N .

Finalmente é necessário mostrar que $S = S'$. Temos que S' é um conjunto compacto (limitado e fechado) pois N o é. Sendo assim, S' não pode incluir parte de uma componente conexa de S , e então, S' deve consistir de um subconjunto de componente conexas de S . Desde que cada componente conexa de S contém uma amostra s (de fato contém várias), e $\mu_N(s) = s$, Todas as componentes conexas de S estão em S' , portanto $S' = S$ e consequentemente N e S são homeomorfos. ■

7. CONCLUSÕES E ATIVIDADES FUTURAS

Um aspecto que merece ser estudado é o comportamento do algoritmo na presença de ruídos. Também temos intenção de testá-lo quando combinado com alguma técnica de eliminação de tetraedros slivers.

Finalmente, enfatizamos que nossa técnica de reconstrução através de funções de Morse discretas, tanto bidimensional quanto tridimensional, apresenta resultados empolgantes e certamente, por se tratar de uma técnica baseada em topologia ao invés de geometria, representa um significativo avanço nesta área de pesquisa.

7.1 Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer ao pesquisador Tamal K. Dey por ter disponibilizado suas implementações e nos permitir realizar comparações práticas com o nosso algoritmo

Referências

- Adamy, U., Giesen, J., & John, M., 2000. New techniques for topologically correct surface reconstruction. *Proceedings of the 11th IEEE Visualization 2000 Conference (VIS 2000)*.
- Althaus, E. & Mehlhorn, K., 2000. Tsp-based curve reconstruction in polynomial time. *Symposium on Discrete Algorithms*, vol. 2, pp. 686–695.
- Amenta, N., Bern, M., & Eppstein, D., 1998a. The crust and the β -skeleton: Combinatorial curve reconstruction. *Graphical models and image processing: GMIP*, vol. 60, n. 2, pp. 125–135.
- Amenta, N., Bern, M., & Kamvysselis, M., 1998b. A new voronoi-based surface reconstruction algorithm. *Computer Graphics*, vol. 32, n. Annual Conference Series, pp. 415–421.
- Amenta, N. & Bern, M. W., 1998. Surface reconstruction by voronoi filtering. In *Symposium on Computational Geometry*, pp. 39–48.
- Amenta, N. & Choi, S., 1999. One-pass delaunay filtering for homeomorphic 3D surface reconstruction. vol. 1, n. CS-TR-99-08.
- Amenta, N., Choi, S., Dey, T. K., & Leekha, N., 2002. A simple algorithm for homeomorphic surface reconstruction. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, vol. 12, n. 1-2, pp. 125–141.
- Amenta, N., Choi, S., & Kolluri, R. K., 2001. The power crust, unions of balls, and the medial axis transform. *Computational Geometry*, vol. 19, n. 2-3, pp. 127–153.
- Boissonnat, J.-D., 1984. Geometric structures for three-dimensional shape representation. *ACM Trans. Graph.*, vol. 3, n. 4, pp. 266–286.
- CGAL, 2004. Cgal (acesso em 05/02/2004) cgal - computational geometry algorithms library - <http://www.cgal.org>.
- Curless, B. & Levoy, M., 1996. A volumetric method for building complex models from range images. In *Proceedings ACM SIGGRAPH96.*, pp. 303–312.
- Dey, T. K., Giesen, J., & Zhao, W., 2001. Robustness issues in surface reconstruction. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 2073, pp. 658–662.

- Dey, T. K. & Goswami, S., 2003. Tight cocone: a water-tight surface reconstructor. In *Proceedings of the eighth ACM symposium on Solid modeling and applications*, pp. 127–134. ACM Press.
- Dey, T. K., Mehlhorn, K., & Ramos, E. A., 1999. Curve reconstruction: Connecting dots with good reason. In *Symposium on Computational Geometry*, pp. 197–206.
- Edelsbrunner, H., 1996. Surface reconstruction by wrapping finite sets in space. *Raindrop Geomagic, Inc.*, vol. 1, n. 1.
- Edelsbrunner, H. & Mücke, E. P., 1994. Three-dimensional alpha shapes. *ACM Transactions on Graphics*, vol. 13, n. 1, pp. 43–72.
- Forman, R., 2002. A user's guide to discrete morse theory. *Sminaire Lotharingien de Combinatoire*, vol. 48.
- Giesen, J., 1999. Curve reconstruction in arbitrary dimension and the traveling salesman problem. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 1568, pp. 164–176.
- Giesen, J., 2002. Surface reconstruction based on a dynamical system. *Computer Graphics Forum (Procs. EUROGRAPHICS '02)*, vol. 21, pp. 363–371.
- Gois, J. P., 2004. Reconstrução de superfícies a partir de nuvens de pontos. dissertação de mestrado, universidade de são paulo - instituto de ciências matemáticas e computação.
- Hoppe, H., DeRose, T., Duchamp, T., McDonald, J., & Stuetzle, W., 1992. Surface reconstruction from unorganized points. *Computer Graphics.*, vol. 26, n. 2, pp. 71–78.
- Kirkpatrick, D. G. & Radke, J. D., 1985. A framework for computational morphology. *Computational Geometry*, vol. 2, pp. 217–248.
- Massey, W. S., 1967. *Algebraic Topology: An Introduction*. Spring-Verlag, graduate texts in mathematics 56 edition.
- Teichmann, M. & Capps, M., 1998. Surface reconstruction with anisotropic density-scaled alpha shapes. In *Proceedings of the conference on Visualization '98*, pp. 67–72. IEEE Computer Society Press.