Aula #1 — Teoria ergódica

• Situação considerada por Poincaré:

$$f : U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n \quad \text{tq}:$$

1. $\operatorname{div} f = 0$, i.e. $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$

2. $\exists \quad \varphi : \mathbb{R} \times U \longrightarrow U$ fluxo

para $\quad f(x) = x' \qquad (1)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, p) = f(\varphi(t,p))$$

$t \longrightarrow \varphi(t,p)$ é solução de (1)

$\varphi(0,p) = p$

3. medida de Lebesgue U é finita (volumen se U é J-mensurável)

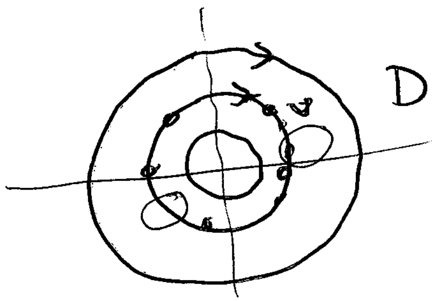
Poincaré provou que quase todo $p \in U$ a solução $t \to \varphi(t,p)$ é recorrent.

ou seja

$$\liminf_{t\to\infty} \| \varphi(t,p) - p \| = 0$$

Caso $\mathbb{R}^2$ $\quad D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 < 1 \}$

$$A(x,y) = (y,-x)$$



Obs:

o fluxo φ preserva a medida de lebesgue

$$\varphi_t(U) = \{ \varphi(t,x) \,/\, x \in U \} \quad \text{pa} \quad \forall t \text{ fixo}$$

$$\lambda(U) = \lambda(\varphi_t(U))$$

Teor. de Recorrencia de Poincare

Seja K = esp. métrico separável

$T: K \to K$ uma transformação mensurável

(A boreleano $T^{-1}(A)$ é boreleano)

μ = medida finita sobre os boreleanos de K

invariante sob T (ou seja $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$)

Então ~~quase todo~~ q.t.p. $x \in K$ é recorrente, i.e

$$\liminf_{n\to\infty} d(T^n(x), x) = 0$$

fluxo

$\varphi_t : U \to U$

$\varphi_t(p) = \varphi(t, p)$

$\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$

preserva volume

Pelo Teor. de recorrência de Poincaré

q.t.p $x \in U$ vale

$$\liminf_{n\to\infty} d(\varphi_1^n(p), p) = 0$$

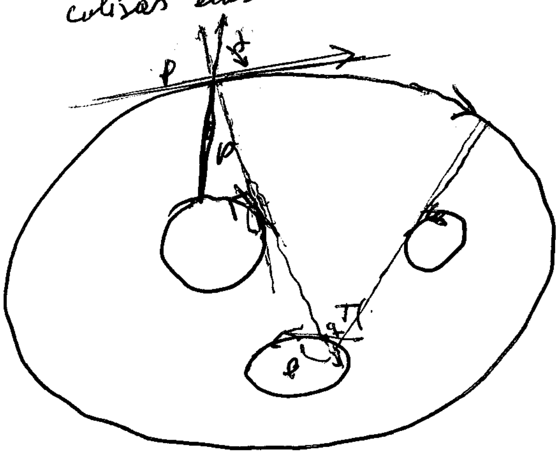
$$(\varphi_1)^n = \varphi_n$$

$\Rightarrow \liminf d(\varphi_t(p), p) = 0$

Exemplo da mesa de bilhar

U = aberto limitado do plano cujo bordo ∂U orientado é união finita de curvas fechadas simples, que supomos C^∞

uma partícula pontual que se move em U com movimento retilíneo e com colisões elásticas



$$K = [0, \pi] \times \partial U$$

$$T: (\alpha, p) \longrightarrow (\beta, q)$$

T é C^∞ no complementos de um nº finito de arcos

λ_0 medida de Lebesgue em ∂U

$\lambda_0(A) =$ comprimento de A

λ medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$ $(d\theta)$

$\lambda \times \lambda_0$ é medida em K

Birkhoff provou que μ: no Borelianos de K

$$\mu(A) = \int_A \operatorname{sen}\theta \, d(\lambda \times \lambda_0)$$

é invariante sob T

O Teorema de recorrência aplicado $(K, \mathcal{B}(K), \mu) \overset{T}{\circlearrowleft}$

quase todo ponto (ϕ, θ) é recorrente

Observação importante $\mu \ll \lambda \times \lambda_0$

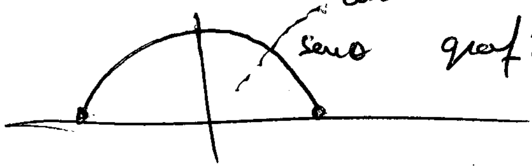
$$\lambda \times \lambda_0(A) = 0 \iff \mu(A) = 0$$

(é fácil verificar em intervalos)

cos θ

sen θ

graf sen θ $0 \leq \theta \leq \pi$



Seja X um conjunto. Uma família de subconjuntos $\mathcal{A} \subset X$ é uma <u>álgebra</u> se:

1) $X \in \mathcal{A}$

2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

3) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Assim

$$A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B = ((A \cap B)^c)^c = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}$$

$$A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$$

Uma álgebra $\mathcal{A}$ é uma <u>σ-álgebra</u> se

$$A_i \in \mathcal{A},\ i = 1, 2 \ldots \Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{A}$$

Obs. 1.. $\mathcal{A} = 2^X$ é σ-algebra de X (subconj. de)

Obs. 2 $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de σ-algebras

$\mathcal{A} = \bigcap \mathcal{A}_\alpha$ é σ-algebra

$\mathcal{A}_0$ família de subconjuntos de X

~~[illegible]~~ $\mathcal{A} = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{A}_\alpha$ $\qquad \mathcal{A}_\alpha$ σ-algebra que contem

todas as σ-algebras que contem $\mathcal{A}_0$

$\mathcal{A}$ = σ-algebra gerada por $\mathcal{A}_0$

Seja $\mathcal{A}$ é uma algebra de subconjuntos de X. Dizemos que $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ é uma medida se para toda familia enumeravel $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2 \dots$ de conjuntos disjuntos tq. $\bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}$ vale

$$\mu\Big(\bigcup_{i \geq 1} A_i\Big) = \sum_{i \geq 1} \mu(A_i)$$

Estamos interessados em conj. de medida total: $A \in \mathcal{A}$ é de medida total se $\mu(A) = \mu(X)$.

$\mathbf{X}$ Espaço de probabilidade: $\mu(X) = 1$

$\mathbf{X}$ é totalmente σ-finito.

$X = \bigcup_{n \geq 1} A_n$, $\mu(A_n) < \infty$ $\forall n$

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida

$A \subset X$ tem medida zero se $\exists A_1 \in \mathcal{A}$ tq $A \subset A_1$ e $\mu(A_1) = 0$

X é um espaço topológico,

$\mathcal{A}$ = σ-algebra de Borel de X é a σ-algebra gerada pela família de conj. abertos

$A \in \mathcal{A}$ são as boreleanos.

Teorema: $\mathcal{A}$ é a σ-algebra dos borelianos de $\mathbb{R}^n$ existe uma única medida $\lambda: \mathcal{A} \longmapsto [0,\infty]$ tal que

Se $A = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$

$$\lambda(A) = (b_1 - a_1) \times \dots (b_n - a_n)$$

λ = medida de Lebesgue

Função mensuráveis

$$\Phi: (\underset{\sigma\text{-algebra}}{X, \mathcal{A}}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$$

$T: X \to Y$ é mensurável

$$\forall B \in \mathcal{B} \Rightarrow T^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

Ex: ~~função~~ X, Y são espaços top.

$T: X \to Y$ contínua

$\Rightarrow T$ é mensurável com

$$(X, \mathcal{B}(X)), (Y, \mathcal{B}(Y))$$

~~Observação:~~

Teorema: X = espaço topológico ($\mathcal{A}$ = borelianos)
Y = " métrico separável ($\mathcal{A}$ = borelianos)

$f_n : X \longrightarrow Y$ seq. de funções mensuráveis

$f : X \to Y$ tal que $f(x) = \lim f_n(x) \quad \forall x$

então f é mensurável.

~~Obs: $(X, \mathcal{B}(X), \mu) \xrightarrow{f_n}$~~

Obs: 1 $\quad Y = \cancel{(-\infty, \infty) = \mathbb{R}} = \mathbb{C}$

$f, f_n : (X, \mathcal{B}(X), \mu) \quad , (\mathbb{C}, \mathcal{B}(Y), \lambda)$

$f_n \to f$ q.t.p. $\quad \exists\, U$ conj. de medida total : $\mu(\underline{U}) = 1$

$\forall x \in U, \quad f_n(x) \to f(x)$

Afirmação: f coincide com uma função mensurável q.t.p.

$(X \cap U, \mathcal{B}(X \cap U), \mu|_{X \cap U}) \qquad f_n|_{X \cap U} \to f|_{X \cap U}$ ponto

$g: X \longmapsto [-\infty, \infty]$

$g^{-1}(0) = f^{-1}(0) \cup X \setminus U$

$g = f$ q.t.p.

g é mensurável.

$g^{-1}(\overset{\text{abertos}}{V}) = (f_{|X \setminus U})^{-1}(V)$ reunião com $X \setminus U$ se $0 \in V$

$(f_{|X \setminus U})^{-1}(V)$

<u>Obs. 2</u> $\quad Y = [-\infty, \infty]$ $\quad (X, \mathcal{B}(X)) \xrightarrow{f_n} (Y, \mathcal{B}(Y))$

$\cancel{\sup} f_n$

$\inf f_n$

$$\limsup f_n = \sup_{n \geq 1} \left\{ \inf_{m \geq n} f_m(x) \right\}$$

$$\liminf f_n = \inf_{n \geq 1} \left\{ \sup_{m \geq n} f_m(x) \right\}$$

são mensuráveis

Funções integráveis

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de medida

$A \subset X$, $\quad f_A =$ função característica de A

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in A^c \end{cases}$$

$(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}), \lambda)$

$f_{A_i} : X \longrightarrow \mathbb{C}$

f é função simples se

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{A_i} \quad : \quad A_i \in \mathcal{A}$$

A função simples f é integrável se

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \mu(A_i) < \infty$$

a integral de f ~~pelo~~ $\cancel{\mu(A_i \cap A_j)}$

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \mu(A_i)$$

valor que independe da representação de f.

$f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ é integrável se existe uma seq. de funções simples integráveis f_n tq:

① $\lim f_n(x) = f(x)$ q.t.p $x \in X$

② $$\lim_{n,m\to\infty} \int_X |f_n - f_m| \, d\mu = 0$$

<u>Neste caso:</u> $$\int_X f \, d\mu = \lim_n \int f_n \, d\mu$$

· o valor não depende de f_n.

f integrável pode não ser mensurável mais coincide ~~com~~ uma tal q.t.p.

Sejam

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(X, \mathcal{A}, \nu)$ espaços de medida

dizemos que μ é absolutamente contínua com respeito a ν, e denotamos $\mu \ll \nu$ se

$A \in \mathcal{A}$ e $\nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$

<u>Teorema</u> (Radon-Nikodym). Se $(X, \mathcal{A}, \nu)$ é totalmente σ-finito então $\mu \ll \nu \Leftrightarrow$

$\exists \underset{f \geq 0}{f : X \to [0, \infty)}$ ν-integrável sobre todo conjunto $A \in \mathcal{A}$ com $\nu(A) < \infty$

tal que $\forall A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A) = \int_A f \, d\nu$$

$f = \frac{d\mu}{d\nu}$ é a <u>derivada</u> de <u>Radon-Nikodym</u>

única q.t.p.

~~se~~ $\mu(X) < \infty$ então f é mensurável.

para depois

$g : X \to \mathbb{C}$ pertence a $\mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \mu)$

$\Leftrightarrow$ $gf \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \nu)$ Neste caso

$$\int_X g \, d\mu = \int_X g \cdot \frac{d\mu}{d\nu} \, d\nu$$

Se $\mu(X) < \infty$ então $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathfrak{A}, \nu)$

~~Teorema de aproximação~~

Dois conjuntos A_1, A_2 coincidem mod 0

$A_1 = A_2$ mod 0 se medida de $(A_1 \Delta A_2)$ é 0

$\mathcal{S}$ = família de subconjuntos de X

$A \in S$, mod 0 se $A = A_0$ mod $(0$

$$\underline{\mu}(A \Delta A_0) = 0$$

~~$S(\text{mod}(0)) = \{ A \subset X \mid A \in S, \text{mod } 0 \}$~~

Def $\underline{S \text{ gera } \mathcal{A}}$ mod (0) se $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0(\text{mod } 0)$

Onde $\mathcal{A}_0$ é a σ-algebra gerada por

S.

Teorema de Aproximação: Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ($\mathcal{A}$ σ-algebra)

um espaço de probabilidade. Uma

subalgebra $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ gera $\underline{\mathcal{A} \text{ mod}(0)}$,

$\Leftrightarrow$ $\forall\, A \in \mathcal{A}$ e $\varepsilon > 0$ $\exists\, A_0 \in \mathcal{A}_0$

tq: $\mu(A \Delta A_0) \leq \varepsilon$

$\Rightarrow$ ~~trivial~~

$\Leftarrow$ interessa

②

<u>Teorema de Lusin</u> .- Seja X um espaço métrico separável. $\mathcal{A}$ a σ-algebra dos boreleanos de X e $\mu : \mathcal{A} \mapsto [0,1]$ uma medida. Então para todo boreleano $A \subset X$ e todo $\varepsilon > 0$ $\exists$ um compacto $K \subset A$ tq $\mu(A - K) \leq \varepsilon$

<u>Teorema (Critério de aditividade)</u> .-
Seja $\mathcal{A}$ uma algebra de subconjuntos de X e $\mu : \mathcal{A} : ~~[0,1]~~ \longrightarrow [0,1]$ uma funçã tq

$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_m) = \sum \mu(A_i)$$

para toda familia $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1 \ldots m$ de conj. disjuntos

Suponhas que existe uma familia $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ tal que

(4) $\mathcal{C}$ é uma classe compacta i.e.

$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset \ldots$ são elementos de $\mathcal{C}$

então

$\bigcap A_i \neq \emptyset$

(5) $\mathcal{C}$ possui a propriedade de aproximação, i.e. $\mu(A) = \sup\{\mu(C) \mid C \in \mathcal{C}, C \subset A\}$, $\forall A \in \mathcal{A}$.

Então μ é uma medida.

medida de Lebesgue

Exemplo: classe compacta = conj. compactos de um espaço topológico.

Teorema de extensão de Hahn-Kolmogorov

X = conj. $\mathcal{A}_0$ uma álgebra de subconjuntos de X

$\mu_0 : \mathcal{A}_0 \mapsto [0,1]$ medida. E

(7)

Se $\mathcal{A}$ é a σ-algebra gerada por $\mathcal{A}_0$ existe uma e ~~uma~~ só uma medida.

$\mu : \mathcal{A} \to [0,1]$ tq $\mu/\mathcal{A}_0 = \mu_0$.